

MODELO FUZZY-DEA-SAVAGE PARA ANÁLISE DE EFICIENCIA DO PARQUE DE REFINO BRASILEIRO

Hugo Luís do Nascimento Pimenta

Mestrado em Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria, 156, São Domingos, CEP: 24210-240, Niterói, RJ
hlnpimenta@yahoo.com.br

João Carlos Correia Baptista Soares de Mello

Departamento de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, São Domingos, 24210-240, Niterói, RJ
jcsmello@producao.uff.br

Resumo

Existem situações onde um modelo de Análise Envoltória de Dados pode apresentar variáveis com um certo grau de incerteza em seus valores. Nestes casos, a fronteira eficiente é construída levando-se em consideração os limites de incerteza na medição da variável para cada DMU, resultando numa região chamada de fronteira difusa, onde cada DMU possui um certo grau de pertinência a esta fronteira. A inversão de *inputs* e *outputs* levam à fronteira invertida difusa, cujo grau de pertinência de cada DMU também poderá ser calculado. A combinação entre os índices de pertinência das DMU's às fronteiras difusa e invertida difusa gera um índice chamado *eficiência fuzzy-DEA* que, quando associado aos conceitos de ponderação do modelo DEA-SAVAGE, permite a realização de uma análise de sensibilidade do grau de pertinência de cada DMU, através da variação do coeficiente de otimismo (α), gerando o modelo chamado *FUZZY-DEA-SAVAGE*.

Palavras-chave: DEA – SAVAGE – FUZZY.

Abstract

There are situations where Data Envelopment Analysis models can be applied with a uncertainty in some variables measurement. In these cases, the efficient frontier is build taking in account the uncertainty limits of each variable measurement. The efficient frontier is build accounting the variable minor and major values. The inversion of inputs and outputs allows the fuzzy inverted frontier construction where the DMUs degree of membership could be calculated. The *fuzzy-DEA* efficiency is calculated by the combination of fuzzy frontier and fuzzy inverted frontier. In this paper we propose the association of *fuzzy-DEA efficiency* with Savage method to allow a sensibility analysis of the DMU' s degree of membership, based on the optimism coefficient(α) variation. The new model is called *FUZZY-DEA-SAVAGE*.

Keywords: DEA – SAVAGE – FUZZY.

1. INTRODUÇÃO

Os modelos de Análise Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* – DEA) clássicos (Cooper et al., 2000) são capazes de avaliar o grau de eficiência relativa de unidades produtivas, construindo uma fronteira de produção, também denominada de fronteira eficiente, linear por partes, de tal forma que as unidades que possuírem a melhor relação "produto/insumo" serão consideradas mais eficientes e estarão situadas sobre esta fronteira. Para isso, assume-se que existe certeza quanto aos valores das variáveis (*inputs* e *outputs*), utilizadas no modelo. Porém, isso pode não acontecer. Existem situações onde uma ou mais variáveis apresentam incerteza quanto ao seu valor. Nestes casos a fronteira eficiente é construída levando-se em consideração os limites de incerteza, isto é, os maiores e menores valores possíveis de serem assumidos pela variável afetada pela incerteza na medição (Soares de Mello et al., 2005).

Esta fronteira eficiente, chamada de fronteira difusa, é uma região onde as DMUs podem estar contidas totalmente, parcialmente ou não estar contidas. Desta forma introduz-se o conceito de pertinência, onde cada DMU possui um certo grau de pertinência à fronteira difusa. Da mesma forma, a fronteira invertida (Yamada et al., 1994; Novaes, 2002; Entani et al., 2002), também é afetada pela incerteza nos valores das variáveis, levando a uma fronteira invertida difusa, que pode ser utilizada para distinguir entre as diversas DMUs com grau de pertinência zero à fronteira difusa original. Para esse caso, quanto maior o grau de pertinência à fronteira invertida menor a eficiência da DMU (Soares de Mello et al., 2005). A combinação destes dois índices de pertinência permite calcular um índice de eficiência difuso, chamado de *eficiência difusa* (ou *eficiência fuzzy-DEA*).

O grau de pertinência à fronteira não é uma medida de eficiência, conseqüentemente, a agregação dos dois índices de pertinência também não é. Na verdade a *eficiência difusa* é apenas uma ponderação normalizada entre um índice de pertinência, e o complementar de outro índice de pertinência (Soares de Mello et al., 2005).

Neste trabalho propõe-se a realização de uma análise de sensibilidade da ponderação entre os índices de pertinência das DMU's às fronteiras otimista (fronteira difusa) e pessimista (fronteira invertida difusa). Para tal será realizada uma associação entre a *eficiência fuzzy-DEA* e o modelo DEA-SAVAGE proposto por Pimenta e Soares de Mello (2005), gerando um modelo chamado FUZZY-DEA-SAVAGE, permitindo uma avaliação mais detalhada do grau de pertinência de cada DMU.

Este modelo será aplicado inicialmente a um exemplo hipotético simples com variação em apenas uma das variáveis. Em seguida, o modelo será utilizado no estudo de caso apresentado por Pimenta e Soares de Mello (2005), para avaliar a eficiência do parque de refino nacional na produção de derivados de petróleo, quando há incerteza em uma das variáveis do modelo.

2. REVISÃO DO MODELO DEA-SAVAGE

O método de Savage (Savage, 1950), também conhecido como método ponderado ou método realista de tomada de decisão, pode ser associado à Análise Envoltória de Dados (DEA), permitindo a ponderação entre a fronteira eficiente (DEA clássico) e o complementar da fronteira invertida. Na equação (I) observa-se que a eficiência composta Ef_{SAVAGE} é calculada através da ponderação entre os valores da eficiência padrão F_o do DEA e a ineficiência em relação à fronteira invertida F_p .

$$Ef_{SAVAGE} = \alpha.F_o + (1 - \alpha).(1 - F_p) \quad (I)$$

O valor de α deverá estar no intervalo entre 0 e 1 e, quanto maior for o valor de α , mais benevolente será a avaliação e, para valores baixos de α a avaliação será mais agressiva.

Coefficientes de ponderação com valores mais elevados (acima de 50%) favorecem as melhores práticas observadas na avaliação de DMU, dando menor importância à avaliação de cada DMU através da fronteira ineficiente. Por outro lado, coeficientes com valores mais baixos (abaixo de 50%) dão maior ênfase a avaliação das DMUs pelas suas piores práticas. Os valores extremos de 100% e 0% para este coeficiente levam, respectivamente, aos resultados de eficiência da fronteira padrão e da fronteira invertida (Pimenta e Soares de Mello, 2005).

Diferente da aplicação direta do método de Savage, onde se define um coeficiente de otimismo (α) único, o modelo DEA-SAVAGE realiza uma análise de sensibilidade da eficiência das DMU's para diversos valores do coeficiente de otimismo (α), permitindo uma avaliação mais detalhada de cada DMU. As DMUs que mantiverem o seu nível de eficiência alto independente do valor escolhido como coeficiente de ponderação poderão ser consideradas as "verdadeiras" eficientes, enquanto, DMUs que tiverem uma queda do seu nível de eficiência com a redução do valor do coeficiente de ponderação serão consideradas ineficientes, uma vez que obtêm maiores níveis de eficiência quando a avaliação lhes é favorável, mas não possuem um bom desempenho quando avaliadas através do método pessimista (Pimenta e Soares de Mello, 2005).

3. REVISÃO DO MODELO FUZZY-DEA PARA UMA VARIÁVEL COM INCERTEZA

Nos modelos DEA, se não houver certeza sobre os valores assumidos por uma variável (*input* ou *output*), não haverá certeza sobre a exata localização da fronteira. Neste caso, a fronteira não é um conjunto no sentido clássico do termo, mas um conjunto difuso (Zadeh, 1965). Os limites inferior e superior desse conjunto difuso são denominados fronteira pessimista e fronteira otimista quando a variável com incerteza é um *output*, e inversamente quando a variável de incerteza é o *input*. Para esse conjunto não tem sentido dizer que uma unidade pertence ou não ao conjunto; deve-se fazer referência ao grau de pertinência desse elemento ao conjunto. Dessa forma, em vez de existirem DMUs na fronteira e outras fora da fronteira, haverá DMUs com diferentes graus de pertinência à fronteira (Soares de Mello et al., 2005).

3.1. CRIAÇÃO DA FRONTEIRA DEA DIFUSA

A Figura 1 apresenta a interpretação geométrica da fronteira difusa para o modelo DEA BCC (Banker et al., 1984). A fronteira difusa é toda a região situada entre as fronteiras pessimista (fronteira inferior) e otimista (fronteira superior). Note-se ainda que uma DMU não é mais representada por um ponto; a incerteza na medição do *output* faz com que a representação da DMU seja um segmento de reta com extremidades determinadas pelos valores pessimista e otimista desse *output* (Soares de Mello et al., 2005).

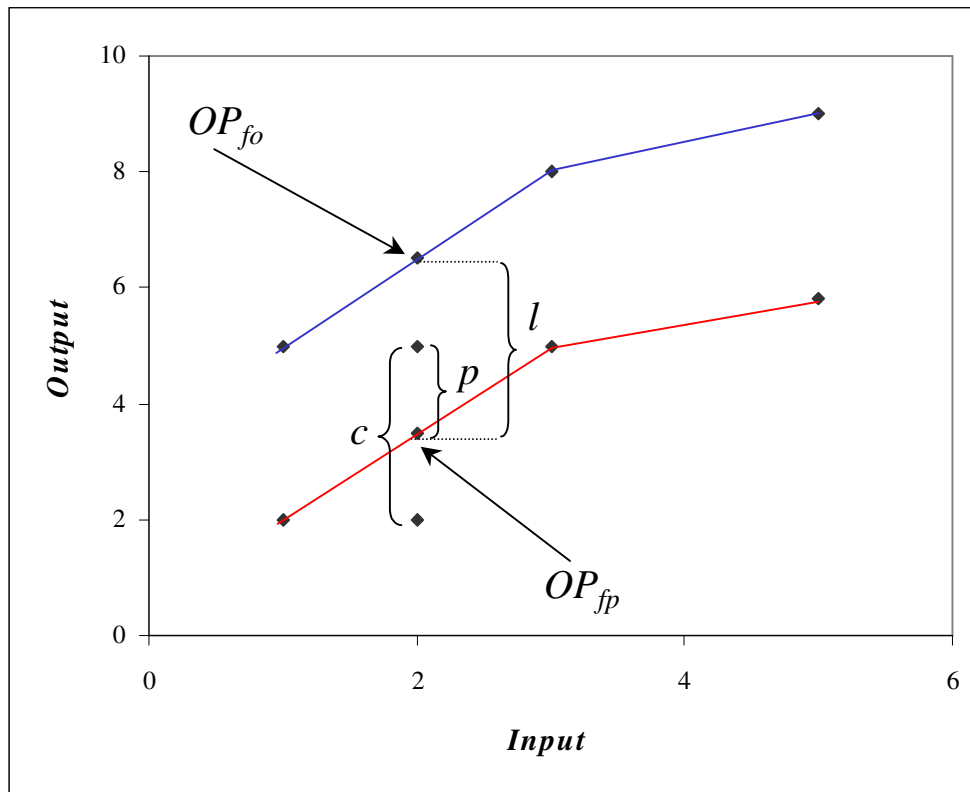


Figura 1: Fronteiras otimista e pessimista (Soares de Mello et al., 2005).

Na Figura 1, OP_{fo} e OP_{fp} referem-se ao *output* projetado na fronteira otimista e pessimista, respectivamente. c é o comprimento da DMU, ou seja, é a diferença entre os valores otimista e pessimista do *output*; l é a largura da faixa, isto é, representa para cada DMU a diferença entre o valor do *output* incerto para as fronteiras otimista e pessimista; p é parte que está na faixa, ou seja, é a diferença entre o *output* otimista de cada DMU e a intersecção dessa DMU com a fronteira pessimista. Uma vez definidas a fronteira difusa e os termos c , l e p , deve-se definir o grau de pertinência de cada DMU a essa fronteira (Soares de Mello et al., 2005).

Podem ocorrer as seguintes situações com relação à pertinência de uma DMU:

- A DMU possui seu comprimento c igual a largura l da fronteira difusa e está totalmente contida na mesma. Neste caso o grau de pertinência à fronteira deve ser igual a 1;
- A DMU apenas toca a fronteira. Neste caso o grau de pertinência à fronteira deve ser nulo;
- A DMU possui seu comprimento c maior a largura l da fronteira difusa onde parte do seu comprimento está contida na mesma e parte está fora da fronteira. Neste caso a DMU deverá possuir um grau de pertinência à fronteira intermediário, igual a p/c ;
- A DMU possui seu comprimento c menor a largura l da fronteira difusa, sendo que a mesma está totalmente contida na mesma e parte está fora da fronteira. Neste caso a DMU deverá possuir um grau de pertinência à fronteira intermediário, igual a p/l .

A pertinência à fronteira difusa é definida pela equação (II). Esta equação satisfaz os casos anteriores e garante que uma DMU só tenha pertinência 1 à fronteira difusa se ela for eficiente tanto na hipótese pessimista quanto na otimista.

$$\wp = \frac{p^2}{lc} \quad (\text{II})$$

3.2. FRONTEIRA DIFUSA COM UM INPUT COM INCERTEZA

Para o caso de um *input* com incerteza define-se como *input* otimista, I_{fo} , aquele com o menor valor que o *input* pode assumir, e *input* pessimista, I_{fp} , o de maior valor que o *input* pode assumir. Quando se consideram os *inputs* otimistas para todas as DMUs, tem-se a fronteira otimista; quando são considerados os *inputs* pessimistas para todas as DMUs, obtém-se a fronteira pessimista (Soares de Mello et al., 2005).

$$Ef_{fp} = \frac{IP_{fp}}{I_{fp}} \quad (\text{III})$$

$$Ef_{fo} = \frac{IP_{fo}}{I_{fo}} \quad (\text{IV})$$

A equação (V) apresenta a largura da faixa l , que representa a diferença entre o alvo da fronteira pessimista e o alvo da fronteira otimista:

$$l = IP_{fp} - IP_{fo} = I_{fp}Ef_{fp} - I_{fo}Ef_{fo} \quad (\text{V})$$

Observa-se na equação (VI) o comprimento da DMU c que é a diferença entre o *input* pessimista e o otimista:

$$c = I_{fp} - I_{fo} \quad (\text{VI})$$

A parte da DMU que está na fronteira p é a diferença entre o alvo do *input* pessimista na fronteira pessimista e o *input* otimista, desde que a diferença seja positiva. Isto implica que o *input* otimista deve estar dentro da faixa da fronteira difusa; caso contrário, p deve ser igual a 0. Em (VII) formaliza-se a equação para p .

$$p = I_{fp}Ef_{fp} - I_{fo}, \text{ se } I_{fp}Ef_{fp} - I_{fo} \geq 0$$

$$p = 0, \text{ caso contrário} \quad (\text{VII})$$

Ao serem substituídos os valores de p (calculado em (VII)), l e c (determinados no parágrafo anterior) na expressão (II), é possível obter a expressão que represente algebricamente a pertinência. Essa relação é apresentada em (VIII).

$$\wp = \frac{(I_{fp}Ef_{fp} - I_{fo})^2}{(I_{fo}Ef_{fo} - I_{fp}Ef_{fp})(I_{fp} - I_{fo})}, \text{ se } I_{fp}Ef_{fp} - I_{fo} \geq 0$$

$$\wp = 0, \text{ caso contrário} \quad (\text{VIII})$$

3.3. FRONTEIRA DIFUSA COM UM *OUTPUT* COM INCERTEZA

Para o caso de um *output* com incerteza, ao considerarem-se as definições clássicas de DEA orientado a *outputs*, e que, nesta situação, as eficiências são dadas por números maiores que a unidade, têm-se as equações (IX) e (X), nas quais O_{fo} e O_{fp} são os valores nas fronteiras otimista e pessimista deste *output* (Soares de Mello et al., 2005).

$$Ef_{fp} = \frac{OP_{fp}}{O_{fp}} \quad (IX)$$

$$Ef_{fo} = \frac{OP_{fo}}{O_{fo}} \quad (X)$$

A equação (XI) apresenta a largura da faixa l , que representa a diferença entre o alvo da fronteira otimista e o alvo da fronteira pessimista:

$$l = OP_{fo} - OP_{fp} = O_{fo} Ef_{fo} - O_{fp} Ef_{fp} \quad (XI)$$

O comprimento da DMU c é a diferença entre o *output* otimista e o pessimista:

$$c = O_{fo} - O_{fp} \quad (XII)$$

A parte da DMU que está na fronteira p é a diferença entre o *output* otimista e o alvo do *output* pessimista na fronteira pessimista, desde que a diferença seja positiva. Isto implica que o *output* otimista deve estar dentro da faixa da fronteira difusa; caso contrário, p deve ser igual a 0. Em (XIII) formaliza-se a equação para p .

$$p = O_{fo} - O_{fp} Ef_{fp}, \text{ se } O_{fo} - O_{fp} Ef_{fp} \geq 0 \quad (XIII)$$

$p = 0$, caso contrário

Ao serem substituídos os valores de p (calculado em (XIII)), l e c (determinados no parágrafo anterior) na expressão (II), é possível obter a expressão que represente algebricamente a pertinência. Essa relação é apresentada em (XIV).

$$\wp = \frac{(O_{fo} - O_{fp} Ef_{fp})^2}{(O_{fo} Ef_{fo} - O_{fp} Ef_{fp})(O_{fo} - O_{fp})}, \text{ se } O_{fo} - O_{fp} Ef_{fp} \geq 0 \quad (XIV)$$

$\wp = 0$, caso contrário

3.4. FRONTEIRA INVERTIDA DIFUSA E DEFINIÇÃO DA EFICIÊNCIA FUZZY-DEA

A fronteira invertida (Yamada et al., 1994; Novaes, 2002; Entani et al., 2002), que consiste na troca dos *outputs* com *inputs*, também é afetada pela incerteza nos valores das variáveis, levando a uma fronteira invertida difusa em relação à qual as DMUs também possuem um grau de pertinência.

Uma fronteira invertida difusa pode ser utilizada para distinguir entre as diversas DMUs com grau de pertinência zero à fronteira difusa original. Para esse caso, quanto maior o grau de pertinência à fronteira invertida menor a eficiência da DMU. Desta forma, com os dois graus de pertinência,

Soares de Mello et al. (2005) propõe a construção de um índice único de eficiência, denominado eficiência difusa ou eficiência FUZZY-DEA, para situações onde uma ou mais variáveis (*inputs* ou *outputs*) apresentam incerteza em seus valores. Esse índice é dado pela equação (XV), na qual \wp_o é o grau de pertinência à fronteira original e \wp_i é o grau de pertinência à fronteira invertida.

$$Ef_{difusa} = \frac{(\wp_o - \wp_i + 1)}{2} \quad (XV)$$

Apesar de, por simplicidade de linguagem, a agregação dos dois índices de pertinência tenha recebido a denominação de *eficiência difusa*, ele não é um indicador de eficiência no sentido clássico do termo. É apenas uma ponderação normalizada entre um índice de pertinência, e o complementar de outro índice de pertinência.

4. MODELO FUZZY-DEA-SAVAGE PARA UMA VARIÁVEL COM INCERTEZA

O modelo DEA-SAVAGE apresentado na equação (I) permite a ponderação entre a fronteira eficiente e a fronteira invertida em situações onde existe certeza quanto aos valores das variáveis. Para casos onde existe incerteza em uma das variáveis, este modelo pode ser redefinido, substituindo F_o por \wp_o e, F_p por \wp_i , permitindo a ponderação entre os índices de pertinência às fronteiras difusa e invertida difusa.

A equação (XVI) representa o modelo FUZZY-DEA-SAVAGE, que consiste na associação entre a *eficiência fuzzy-DEA* e o modelo DEA-SAVAGE proposto por Pimenta e Soares de Mello (2005), permitindo uma avaliação mais detalhada do grau de pertinência de cada DMU.

$$Ef_{difusa-SAVAGE} = \alpha \cdot \wp_o + (1 - \alpha) \cdot (1 - \wp_i) \quad (XVI)$$

Assim como o modelo DEA-SAVAGE, o valor de α deverá estar no intervalo entre 0 e 1 e, quanto maior for o valor de α , mais benevolente será a avaliação e, para valores baixos de α a avaliação será mais agressiva.

Observa-se que a *eficiência difusa* definida na equação (XV) pode ser considerada um exemplo de aplicação do método de SAVAGE, pois realiza uma ponderação entre o índice de pertinência à fronteira difusa e o complementar do índice de pertinência à fronteira invertida difusa onde o valor do coeficiente de ponderação (α) é de 50%.

Para uma DMU possuir alta eficiência, esta deve ter um elevado grau de pertinência em relação à fronteira difusa e baixo grau em relação à fronteira invertida difusa. O modelo FUZZY-DEA-SAVAGE permite a realização de uma análise de sensibilidade da ponderação entre os índices de pertinência das DMU's às fronteiras difusa e fronteira invertida difusa diversos valores do coeficiente de otimismo (α).

5. EXEMPLO SIMPLES PARA UMA VARIÁVEL COM INCERTEZA

Nesta seção o modelo FUZZY-DEA-SAVAGE é aplicado a uma situação simples apresentada em (Soares de Mello et al., 2005) onde apenas uma das variáveis apresenta incerteza. A Figura 2 apresenta a fronteira difusa definida pelos limites inferior (fronteira pessimista) e superior (fronteira otimista) de cada DMU, uma vez que a variável que apresenta incerteza é um *output*.

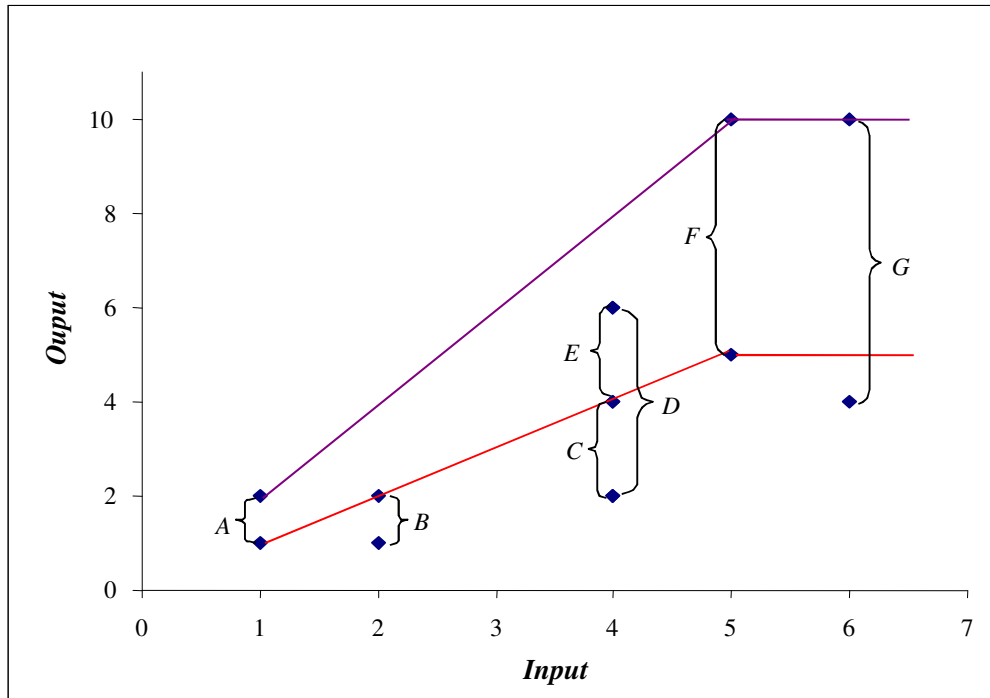


Figura 2: Fronteira difusa no modelo BCC.

A Tabela 2 apresenta os valores das variáveis que serão utilizados no cálculo da eficiência do índice de pertinência de cada DMU às fronteiras difusa e invertida difusa.

DMU	I	O_{fp}	O_{fo}
A	1	1	2
B	2	1	2
C	4	2	4
D	4	2	6
E	4	4	6
F	5	5	10
G	6	4	10

Tabela 1: Fronteira difusa no modelo BCC.

O modelo FUZZY-DEA, apresentado na seção 3.3, foi aplicado aos dados contidos na tabela 1 através do software SIAD (Angulo Meza et al., 2004), utilizando o modelo BCC orientado a *outputs* para o cálculo dos alvos da fronteira otimista (OP_{fp}) e da fronteira pessimista (OP_{fo}), definindo a pertinência à fronteira difusa para cada DMU (ϕ_o) a partir dos valores de c , l e p . Os resultados são apresentados na tabela 2.

DMU	Input	Output fronteira pessimista	Output fronteira otimista	OP_{fp}	OP_{fo}	Ef_{fp}	Ef_{fo}	c	l	p	ϕ_o
A	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1
B	2	1	2	2	4	2	2	1	2	0	0
C	4	2	4	4	8	2	2	2	4	0	0
D	4	2	6	4	8	2	1,33	4	4	2	0,25

E	4	4	6	4	8	1	1,33	2	4	2	0,50
F	5	5	10	5	10	1	1	5	5	5	1
G	6	4	10	5	10	1,25	1	6	5	5	0,83

Tabela 2. Pertinência em relação à fronteira difusa

Analogamente, o modelo foi aplicado aos dados contidos na Tabela 1, para o cálculo da pertinência à fronteira invertida difusa. Para tal, utilizou-se o modelo BCC orientado a *inputs* no software SIAD, obtendo alvos da fronteira otimista e da fronteira pessimista referentes a fronteira invertida difusa (φ_i). Os resultados podem ser observados na Tabela 3.

<i>DMU</i>	<i>Input</i> <i>fronteira</i> <i>otimista</i>	<i>Input</i> <i>fronteira</i> <i>pessimista</i>	<i>Output</i>	IP_{fp}	IP_{fo}	Ef_{fp}	Ef_{fo}	<i>c</i>	<i>l</i>	<i>p</i>	\bullet_i
A	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1
B	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
C	2	4	4	4	2	1	1	2	2	2	1
D	2	6	4	4	2	0,67	1	4	2	2	0,5
E	4	6	4	4	2	0,67	0,5	2	2	0	0
F	5	10	5	7	3	0,7	0,6	5	4	2	0,2
G	4	10	6	10	4	1	1	6	6	6	1

Tabela 3. Pertinência em relação à fronteira invertida difusa

Estes resultados, também apresentados em Soares de Mello et al. (2005), são aplicados ao modelo FUZZY-DEA-SAVAGE, apresentado na equação (XVI), para realização de uma análise de sensibilidade da ponderação entre os índices de pertinência das DMU's às fronteira difusa (φ_o) e fronteira invertida difusa (φ_i) através da variação do coeficiente de otimismo (α).

Na Tabela 4 estão os resultados obtidos através da aplicação da equação (XVI) aos índices de pertinência, variando o valor do coeficiente α de 0.1 a 1.0, em intervalos de 0.1. Os valores apresentados nesta tabela não estão normalizados.

DMU	ALFA (α)										
	100%	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	0%
A	1,00	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,00
B	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
C	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
D	0,25	0,28	0,30	0,33	0,35	0,38	0,40	0,43	0,45	0,48	0,50
E	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
F	1,00	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	0,82	0,80
G	0,83	0,75	0,67	0,58	0,50	0,42	0,33	0,25	0,17	0,08	0,00

Tabela 4. Pertinência ponderada para diversos valores de α .

O Gráfico 1 contém a variação do índice de pertinência ponderado de cada DMU para diferentes coeficientes de otimismo (α).

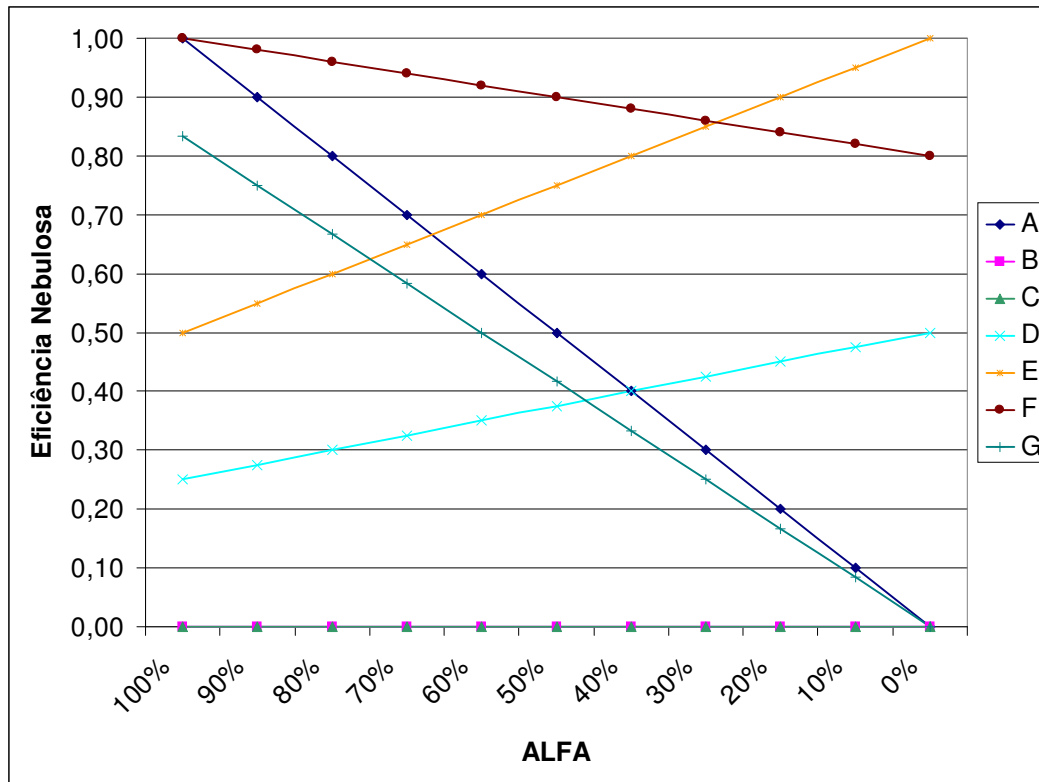


Gráfico 1. Ponderação entre as fronteiras difusa e invertida difusa através da variação do coeficiente α .

É interessante observar que o comportamento de DMU com relação à variação de sua *eficiência difusa* através da variação do coeficiente de otimismo. A DMU F sofreu uma ligeira redução de sua *eficiência difusa* com a redução do coeficiente de ponderação, enquanto as DMUs A e G, por terem pertinência a fronteira difusa (β_o) e pertinência a fronteira invertida difusa (β_i) iguais a 1, tiveram uma queda acentuada da *eficiência difusa* à medida que o valor do coeficiente de ponderação foi reduzido. Estas DMUs são dois exemplos de que quando avaliadas através de suas melhores práticas apresentam um bom desempenho, mas quando avaliadas pela fronteira invertida difusa apresentam um mau desempenho.

As DMUs E e D tiveram o comportamento inverso, ou seja, sofreram um aumento do valor da *eficiência difusa* a medida que o valor do coeficiente de ponderação era reduzido. No caso das DMUs B e C, seus valores de *eficiência difusa* mantiveram-se iguais a zero, uma vez que ambas possuem pertinência a fronteira difusa igual a zero e, pertinência a fronteira invertida difusa igual a 1.

6. ESTUDO DE CASO: ANÁLISE DE EFICIENCIA DO PARQUE DE REFINO BRASILEIRO CONTENDO UMA VARIÁVEL COM INCERTEZA

O modelo DEA-SAVAGE apresentado em Pimenta e Soares de Mello (2005) foi aplicado ao estudo de caso do desempenho do parque de refino brasileiro na produção de derivados de petróleo no período de 1992 a 2001, cujas DMU's foram o próprio parque de refino em cada ano, os *inputs* o petróleo disponível e a capacidade de refino e, o *output* foi a produção dos derivados anual.

Nota-se que a capacidade de refino é uma variável que possui incerteza em sua medição, uma vez que seu valor varia durante cada ano, podendo aumentar devido a novos investimentos em unidades de processo. Desta forma, propõe-se a realização de uma análise baseada no modelo *fuzzy-DEA* apresentado em Soares de Mello et al. (2005), onde a fronteira eficiente é construída levando-se em consideração os limites de incerteza. Porém, este modelo possui uma limitação que consiste na sua aplicação apenas para duas variáveis, onde apenas uma delas possui incerteza. Modelos onde há variação em mais de uma variável possuem alvos não radiais e não serão abordados no presente artigo. Desta forma o modelo apresentado em Pimenta e Soares de Mello et al. (2005) será simplificado e o *input* será a capacidade de refino e , o *output*, a produção dos derivados anual.

Serão calculados os índices de pertinência das DMU's à fronteira difusa e fronteira invertida difusa para avaliar a eficiência do parque de refino nacional na produção de derivados de petróleo e , em seguida, será realizada uma análise de sensibilidade da ponderação entre estes índices de pertinência através do modelo chamado *FUZZY-DEA-SAVAGE*, permitindo uma avaliação mais detalhada do grau de pertinência de cada DMU.

A Tabela 5 apresenta os valores das variáveis que serão utilizados no cálculo da eficiência do índice de pertinência de cada DMU às fronteiras difusa e invertida difusa.

<i>DMU</i>	<i>Input</i>	<i>Input</i>	<i>Output</i>
	<i>fronteira otimista</i>	<i>fronteira pessimista</i>	
1993	239080	241680	73196
1994	241680	246580	76969
1995	246580	247880	75675
1996	246580	247880	78922
1997	247880	291520	82525
1998	291520	294520	90290
1999	294520	304200	93796
2000	304200	310100	96162
2001	310100	311100	100806

Tabela 5: Matriz de Dados para Calculo da Fronteira difusa no modelo BCC.

O modelo *FUZZY-DEA*, apresentado na seção 3.3, foi aplicado aos dados contidos na Tabela 5 através do software SIAD (Angulo Meza et al., 2004), utilizando o modelo BCC orientado a *inputs* definindo a pertinência à fronteira difusa para cada DMU (ϕ_o) a partir dos valores de c , l e p . Os resultados são apresentados na Tabela 6. Em seguida o modelo foi utilizado o modelo BCC orientado a *outputs* no software SIAD, obtendo alvos da fronteira otimista e da fronteira pessimista referentes a fronteira invertida difusa (ϕ_i), definindo a pertinência de cada DMU à fronteira invertida difusa. Estes resultados podem ser observados na Tabela 7.

<i>DMU</i>	<i>Input fronteira otimista</i>	<i>Input fronteira pessimista</i>	<i>Output</i>	IP_{fo}	IP_{fp}	Ef_{fp}	Ef_{fo}	c	l	p	ϕ_o
1993	239080	241680	73196	239080,00	241680,00	1,000	1,000	2600	2600,00	2600,00	1,00
1994	241680	246580	76969	241680,00	245765,33	0,997	1,000	4900	4085,33	4085,33	0,83
1995	246580	247880	75675	240788,30	244364,21	0,986	0,977	1300	3575,92	0,00	0,00
1996	246580	247880	78922	243859,37	247880,00	1,000	0,989	1300	4020,63	1300,00	0,32
1997	247880	291520	82525	247880,00	258288,59	0,886	1,000	43640	10408,59	10408,59	0,24
1998	291520	294520	90290	274308,44	280720,66	0,953	0,941	3000	6412,22	0,00	0,00

1999	294520	304200	93796	286241,23	290849,03	0,956	0,972	9680	4607,80	0,00	0,00
2000	304200	310100	96162	294293,99	297684,09	0,960	0,967	5900	3390,10	0,00	0,00
2001	310100	311100	100806	310100,00	311100,00	1,000	1,000	1000	1000,00	1000,00	1,00

Tabela 6. Pertinência em relação à fronteira difusa

DMU	Input	Output fronteira pessimista	Output fronteira otimista	OP_{fp}	OP_{fo}	Ef_{fp}	Ef_{fo}	c	l	p	\bullet_i
1993	73196	239080	241680	239080,00	241680,00	1,00	1,00	2600,00	2600,00	2600,00	1,00
1994	76969	241680	246580	250654,59	261837,18	1,04	1,06	4900,00	11182,58	0,00	0,00
1995	75675	246580	247880	246684,94	254924,01	1,00	1,03	1300,00	8239,07	1195,06	0,13
1996	78922	246580	247880	256645,90	272271,04	1,04	1,10	1300,00	15625,15	0,00	0,00
1997	82525	247880	291520	267698,98	291520,00	1,08	1,00	43640,00	23821,02	23821,02	0,55
1998	90290	291520	294520	291520,00	302099,58	1,00	1,03	3000,00	10579,58	3000,00	0,28
1999	93796	294520	304200	299090,86	306876,40	1,02	1,01	9680,00	7785,54	5109,14	0,35
2000	96162	304200	310100	304200,00	310100,00	1,00	1,00	5900,00	5900,00	5900,00	1,00
2001	100806	310100	311100	310100,00	311100,00	1,00	1,00	1000,00	1000,00	1000,00	1,00

Tabela 7. Pertinência em relação à fronteira invertida difusa

Os índices de pertinência das DMU's à fronteira difusa (ρ_o) e fronteira invertida difusa (ρ_i) são ponderados através da aplicação do modelo FUZZY-DEA-SAVAGE apresentado na equação (XVI), variando-se o valor do coeficiente α de 0.1 a 1.0, em intervalos de 0.1, permitindo a realização de uma análise de sensibilidade da ponderação entre os índices de pertinência das DMU's às fronteiras. Os resultados obtidos desta ponderação entre os índices de pertinência são apresentados na Tabela 8, cujos valores apresentados estão normalizados.

DMU	ALFA (α)									
	100%	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%
1993	1,00	1,00	0,92	0,79	0,67	0,55	0,43	0,32	0,21	0,10
1994	0,83	0,94	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1995	0,00	0,10	0,20	0,29	0,39	0,47	0,56	0,64	0,72	0,79
1996	0,32	0,43	0,53	0,60	0,66	0,72	0,78	0,84	0,89	0,95
1997	0,24	0,29	0,32	0,34	0,36	0,38	0,39	0,41	0,43	0,44
1998	0,00	0,08	0,17	0,24	0,32	0,39	0,46	0,53	0,59	0,66
1999	0,00	0,07	0,15	0,22	0,29	0,36	0,42	0,48	0,54	0,60
2000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2001	1,00	1,00	0,92	0,79	0,67	0,55	0,43	0,32	0,21	0,10

Tabela 8. Pertinência ponderada para diversos valores de α .

O Gráfico 2 apresenta a variação do índice de pertinência ponderado de cada DMU para diferentes coeficientes de otimismo (α).

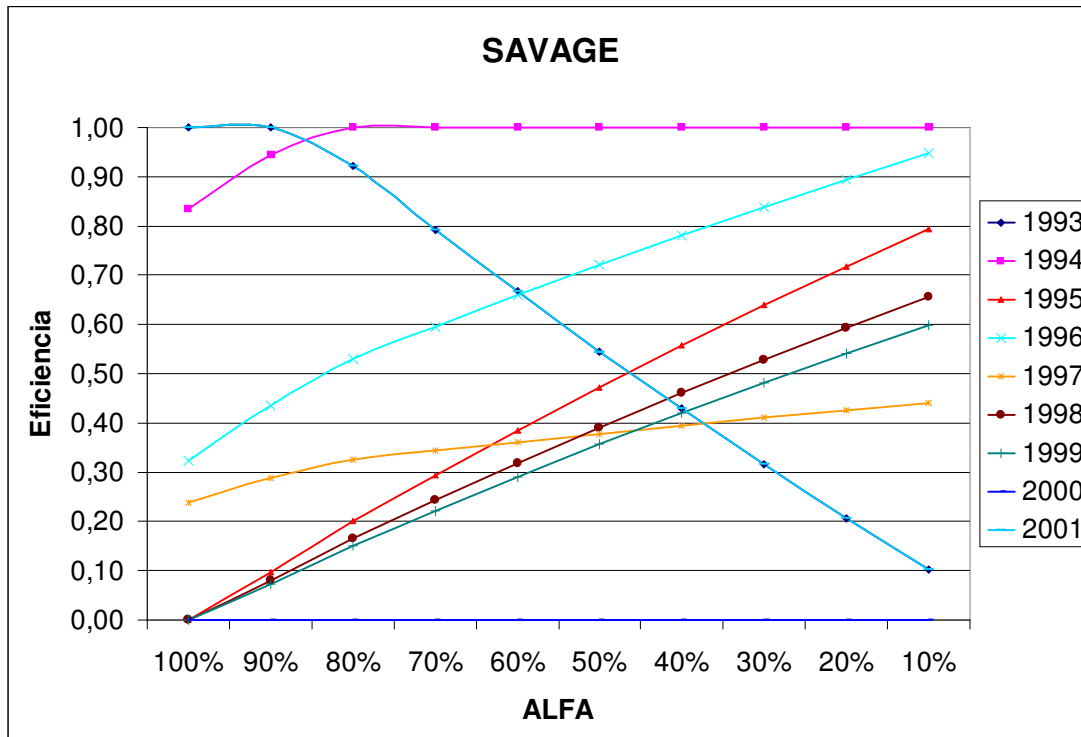


Gráfico 2. Ponderação entre as fronteiras difusa e invertida difusa através da variação do coeficiente α .

A análise do Gráfico 2 permite avaliar o impacto da variação do coeficiente de ponderação sobre o comportamento da sua *eficiência difusa* de cada DMU. Observa-se que a grande maioria das DMUs tiveram um aumento de sua *eficiência difusa* com a redução do coeficiente de ponderação. Isso significa que estas DMUs possuem baixa ou nenhuma pertinência à fronteira difusa (φ_o) e baixa pertinência à fronteira invertida difusa (φ_i). Um exemplo interessante é o caso da DMU 1996 que possui pertinência à fronteira difusa igual a 0,32 e pertinência à fronteira invertida difusa igual a zero. A variação da ponderação entre (φ_o) e o complemento de (φ_i), indica um crescimento de sua *eficiência difusa* com a redução do coeficiente de ponderação. Pode-se concluir que, para esta DMU, quanto mais agressiva for a avaliação do modelo FUZZY-DEA-SAVAGE, maior será o valor de sua *eficiência difusa* e isto ocorre pelo fato desta DMU não pertencer a fronteira invertida difusa.

Outro caso interessante é o das DMUs 1993 e 2001 que, por possuírem pertinência a fronteira difusa (φ_o) e pertinência a fronteira invertida difusa (φ_i) iguais a 1, sofreram uma queda acentuada da *eficiência difusa* à medida que o valor do coeficiente de ponderação foi reduzido. Estas DMUs são exemplos de que quando avaliada através de suas melhores práticas apresentam um bom desempenho, mas quando avaliadas pela fronteira invertida difusa apresentam um mau desempenho. No caso da DMU 2000, seu valor de *eficiência difusa* manteve-se igual a zero, uma vez que possui pertinência a fronteira difusa igual a zero e, pertinência a fronteira invertida difusa igual a 1, sendo este considerado o pior caso de avaliação.

Através destas observações podemos identificar os seguintes casos básicos de comportamento de uma DMU de acordo com seu índices de pertinência e variação do coeficiente de otimismo:

- $\varphi_o = 1$ e $\varphi_i = 1$ • Redução do valor de *eficiência difusa* à medida que o valor do coeficiente de ponderação é reduzido.

- $\varphi_o = 1$ e $\varphi_i = 0$ • Valor de *eficiência difusa* mantém-se igual a 1.
- $\varphi_o = 0$ e $\varphi_i = 1$ • Valor de *eficiência difusa* mantém-se igual a zero.
- $\varphi_o = 0$ e $\varphi_i = 0$ • Aumento do valor de *eficiência difusa* à medida que o valor do coeficiente de ponderação é reduzido.

7. CONCLUSÕES

Os modelos *fuzzy-DEA* são utilizados em situações onde uma ou mais variáveis de um modelo de Análise Envoltória de Dados apresentam incerteza quanto ao seu valor. Nestes casos a fronteira eficiente é construída levando-se em consideração os limites de incerteza na medição da variável para cada DMU. Neste trabalho foi apresentada uma associação entre a *eficiência fuzzy-DEA* e o modelo DEA-SAVAGE permitindo a realização da ponderação entre os índices de pertinência das DMU's às fronteiras difusa e invertida difusa. Este modelo, chamado *FUZZY-DEA-SAVAGE* permitiu a realização de uma análise de sensibilidade da ponderação entre os índices de pertinência das DMU's às fronteira para diversos valores do coeficiente de otimismo (α), permitindo uma avaliação mais detalhada de cada DMU.

O modelo foi aplicado inicialmente a um exemplo hipotético simples com variação em apenas uma das variáveis e, em seguida, o modelo foi aplicado ao estudo de caso apresentado por Pimenta e Soares de Mello (2005), para avaliar a eficiência do parque de refino nacional na produção de derivados de petróleo, onde a capacidade instalada era a variável que possuía incerteza em sua medição.

As DMUs foram avaliadas através de diferentes ponderações permitindo uma análise entre os resultados mais favoráveis e menos favoráveis de cada DMU baseado no seu grau de pertinência as fronteiras difusa e invertida difusa. Desta forma, para que uma DMU possua alta eficiência, esta deve ter um elevado grau de pertinência em relação à fronteira otimista e baixo grau em relação à fronteira pessimista.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Angulo Meza, L.; Biondi Neto, L.; Soares de Mello, J.C.C.B.; Gomes, E.G.; Coelho, P.H.G. *FSDA – Free Software for Decision Analysis (SLAD – Software Livre de Apoio à Decisão): A Software Package for Data Envelopment Analysis Models* In: Memórias del XII Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa - CLAIO, 2004.
- Banker, R.D., Charnes A., Cooper W.W., *Some Models For Estimating Technical And Scale Inefficiencies In Data Envelopment Analysis*. Management Science, V. 30, N. 9, PP. 1078-1092, 1984.
- Cooper, W.W., Seiford, L.M. & Tone, K. (2000). *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Entani, T., Maeda, Y. & Tanaka, H. *Dual Models of Interval DEA and its extensions to interval data*. European Journal of Operational Research, 136, 32-45, 2002.
- Novaes, L.F.L. (2002). *Envoltória Sob Dupla ótica aplicada na avaliação imobiliária em ambiente do sistema de informação geográfica*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Produção, UFRJ, Rio de Janeiro, Dezembro.
- Pimenta, H.L.N., Soares de Mello, J.C.C.B. *Modelo DEA-SAVAGE para Análise de Eficiência do Parque de Refino Brasileiro*. Relatórios de Pesquisa em Engenharia de Produção, 5, 2005.
- Savage, L. *The Foundations of Statistics*, Willey, 1950.
- Soares De Mello, J.C. C. B.; Gomes, E. G.; Angulo Meza, L., Biondi Neto, L., Sant'anna, A.P. *Fronteiras DEA difusas*. *Investigação Operacional*, v. 25, n. 1, 2005.

Yamada, Y, Matui, T. & Sugiyama, M. (1994). New analysis of efficiency based on DEA. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **37** (2), 158-167.

Zadeh, L. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8** (3), 338-353.