SUAVIZAÇÃO DA FRONTEIRA DEA: O CASO BCC N-DIMENSIONAL COM MULTIPLICIDADE SIMULTÂNEA DOS INPUTS E DOS OUTPUTS

Flávia Badini Nacif
Mestrado de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria, 156, São Domingos, CEP: 24210-240, Niterói, RJ, Brasil
flavianacif@predialnet.com.br

Hugo Pimenta
Mestrado de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria, 156, São Domingos, CEP: 24210-240, Niterói, RJ, Brasil
hugo.pimenta@hp.com

João Carlos C. B. Soares de Mello
Depto. de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, 24210-240, São Domingos, Niterói, RJ, Brasil.
jcsmello@producao.uff.br

Resumo
A representação geométrica da fronteira DEA é linear por parte, por isso não possui um plano tangente único nas DMUs extremo-eficientes (vértices da face). Pelo mesmo motivo, o modelo dos multiplicadores (dual do modelo do envelope) admite múltiplas soluções ótimas nas DMUs extremo-eficientes, o que impossibilita o conhecimento das razões de substituição (*tradeoffs*). Uma solução para esse problema é a substituição da fronteira original por uma suavização dessa fronteira, de modo que a fronteira suavizada seja próxima da original, e que tenha derivadas contínuas em todos os pontos. Até agora existe solução apenas para o modelo BCC com apenas um *input*, ou apenas um *output*. No presente artigo, é generalizada a solução mencionada para o caso BCC N-dimensional com multiplicidade simultânea dos *inputs* e dos *outputs*, isto é, qualquer número de *inputs* e qualquer número de *outputs*. É encontrada uma nova fronteira, representada por uma equação que combina todos os *inputs* e os *outputs*, de onde as taxas de substituição (*tradeoffs*) são, então, diretamente retirados. Além disso, é feita uma generalização para o cálculo do grau dos polinômios aproximantes para qualquer número de *inputs* e *outputs* de acordo com o número de DMUs extremo-eficientes.

Palavras-chave: DEA – Suavização – Aproximações polinomiais

1. INTRODUÇÃO

A Análise de Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* – DEA) foi desenvolvida por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) para determinar a eficiência de unidades produtivas (*Decision Making Units* – DMUs), através da construção de uma fronteira de eficiência, de tal forma que as DMUs que possuírem a melhor relação "produto/insumo" serão consideradas mais eficientes e estarão situadas sobre esta fronteira e, as menos eficientes estarão situadas numa região inferior à fronteira, conhecida como envelope (envoltória).

Os modelos DEA clássicos apresentam duas formulações equivalentes (Cooper et al., 2000). Uma das formulações, conhecida como modelo do Envelope, define uma região viável de produção e trabalha com uma distância (não euclideana) de cada DMU à fronteira desta região. A outra formulação, chamada de modelo dos Multiplicadores, trabalha com a razão de somas ponderadas de produtos e recursos, sendo a ponderação escolhida de forma mais favorável a cada DMU, respeitando-se determinadas condições.

As duas formulações, por se constituírem em problemas duais, fornecem a mesma eficiência para cada DMU. No entanto, além da eficiência, outras informações podem ser extraídas dos modelos citados. O modelo do envelope fornece a projeção na fronteira de cada DMU eficiente permitindo a identificação de *benchmark* para cada DMU ineficiente. É de especial interesse observar o que ocorre nas DMUs eficientes: elas são o seu próprio *benchmark* e, assim, o PPL do envelope fica altamente degenerado.

Já o modelo dos multiplicadores fornece os coeficientes de ponderação que cada DMU atribui a cada *input* e *output*. O fato de cada DMU atribuir valores diferentes a esses multiplicadores é a essência do DEA. Cada DMU tem a liberdade de valorizar aquilo em que é melhor, ignorando as variáveis em que o seu desempenho não é bom. Qualquer modelo DEA deve preservar, em menor ou maior grau, essa liberdade.

O uso prático das interpretações dos multiplicadores esbarra em uma dificuldade inerente ao PPL do modelo dos multiplicadores. De fato, o teorema das folgas complementares também permite afirmar que os multiplicadores são os coeficientes da equação do hiperplano tangente à fronteira no ponto de projeção da DMU (Estellita Lins e Angulo-Meza, 2000). Ora, as DMUs eficientes (mais propriamente, as extremo-eficientes) formam os vértices da fronteira e nelas, por não existirem derivadas, não existe hiperplano tangente, embora exista uma infinidade de hiperplanos suporte. Tem-se, portanto, uma infinidade de multiplicadores para cada DMU extremo-eficiente, todos eles conduzindo à eficiência 1 para essas DMUs. Portanto, além de cada DMU ter liberdade para determinar os seus próprios pesos (o que é desejável), para as DMUs que devem servir de exemplo, como detentoras de boas práticas de gestão, é impossível saber quais os pesos que elas efetivamente atribuíram a cada variável. A determinação da importância de cada *input* e *output*, ou o cálculo de pesos sombra, fica assim comprometido quando se lida com DMUs extremo-eficientes.

A ausência de valores únicos para os pesos das DMUs extremo-eficientes impede o cálculo de derivadas direcionais em toda a fronteira, sendo um obstáculo ao uso de DEA como ferramenta auxiliar em problemas multicritério. Em certas situações é desejável em um problema multicritério atribuir pesos aos critérios sem julgamentos de valor do decisor (por exemplo, quando vários decisores não chegam a acordo). DEA seria uma ótima ferramenta para isso, não fosse o fato de que não são conhecidos os pesos atribuídos por algumas DMUs. É óbvio que se o número de DMUs extremo-eficientes for pequeno em relação ao total do número de DMUs, pode-se ignorar os pesos atribuídos pelas extremo-eficientes e trabalhar apenas com os pesos atribuídos pelas demais DMUs (Estellita Lins et al., 2003; Soares de Mello et al., 2002).

O problema da não unicidade dos multiplicadores para as DMUs extremo-eficientes foi abordado por diversos pesquisadores, mas com soluções deficientes. Segundo Rosen et al. (1998), os valores dos multiplicadores podem variar entre o valor calculado com base na derivada à esquerda e o calculado com base na derivada à direita. Esses autores afirmam ser impossível contornar essa multiplicidade de valores e fazem a proposta de um quadro SIMPLEX modificado para calcular os limites de variação dos multiplicadores.

A impossibilidade referida por Rosen et al. (1998) decorre da natureza linear por partes da fronteira DEA. Soares de Mello (2002), Soares de Mello et al. (2002, 2004) mostram que é possível contornar essa impossibilidade mediante a substituição da fronteira DEA original por outra que tenha propriedades semelhantes, mas continuamente diferenciável. Entre as propriedades mantidas, está a atribuição de eficiência unitárias às DMUs extremo-eficientes do modelo DEA original. A técnica, discutida em termos gerais e exemplificada para casos de duas e três dimensões (Soares de Mello et al., 2002, 2004), consiste em suavizar a fronteira DEA original, respeitando as propriedades básicas de DEA: convexidade, monotonicidade crescente dos *inputs* com os *outputs*, mesmas DMUs eficientes e atribuição de pesos diferentes por cada DMU.

Os modelos até agora desenvolvidos serviam apenas para casos bidimensionais (de pouca aplicação prática) ou multidimensionais, mas com multiplicidade não simultânea de *outputs* e *inputs*, o que constitui uma séria limitação.

Este artigo expande os resultados obtidos por Soares de Mello et al. (2002, 2004) ao estudar o caso de suavização da fronteira DEA para o modelo BCC N-dimensional com múltiplos *inputs* e *outputs*. O mesmo referencial teórico anterior, ou seja, a topologia pseudo-métrica e os métodos variacionais diretos serão usados nesta generalização.

O modelo que será aqui apresentado permite determinar valores únicos para os multiplicadores usados por cada DMU eficiente. Além disso, preserva a fronteira tão próximo quanto possível da original mantendo a liberdade de cada DMU determinar os seus próprios multiplicadores.

Por outro lado, esta generalização abre caminho para usar outras vantagens da suavização, por exemplo, a substituição de todas as faces por uma única face. Uma aplicação desta técnica, em modelos com limitações dimensionais, pode ser vista em Gomes et al. (2004).

2. SUAVIZAÇÃO NA FRONTEIRA

Em Soares de Mello et al. (2002, 2004), foi tratado o problema da suavização da fronteira DEA Bi e Tridimensional através de uma pseudo-métrica que trata da proximidade simultânea das funções e suas derivadas, uma vez que a fronteira suavizada deve estar não só próxima da original como também possuir derivadas semelhantes da original, onde existir derivadas.

Foi então proposto, no caso bidimensional, a utilização da diferença do comprimento de arco das funções entre dois pontos como uma medida de proximidade, tanto das próprias funções quanto das suas derivadas. Como nesse caso a região da fronteira que contém 2 DMUs eficientes consecutivas é um segmento de reta que é o menor comprimento de arco entre 2 pontos, apenas o arco da função suavizada é suficiente para caracterizar sua proximidade com a original, devendo este ser minimizado. A proximidade das derivadas é considerada no comprimento de arco, pois a existência de derivadas de valor bem diferente da inclinação da reta suporte do segmento caracteriza uma oscilação da curva em torno do segmento, que equivale a um maior comprimento de arco. O comprimento de arco é representado por:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\, dx$$, onde *y=f(x)* é a equação da fronteira suavizada (I)

Os mesmos argumentos podem ser generalizados para problemas de dimensão superior, substituindo-se segmento de reta por uma região do hiperplano e integral simples por integral múltipla.

2.1. Formulação Geral do Modelo de Suavização

Para modelos DEA com apenas 1 *output*, a suavização consiste em procurar uma função que minimize o comprimento de arco (ou sua generalização *n*-dimensional), que contenha as DMUs Pareto eficientes e que tenha derivadas parciais de segunda ordem em todos os pontos. Por facilidade computacional, pode-se minimizar o quadrado do comprimento de arco, sem alterar o resultado. Então, após determinar as DMUs extremo-eficientes no modelo DEA clássico, a suavização é obtida pelo problema variacional (II).

$$\min L = \int_R \left[1 + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \right] dS$$

$$\begin{aligned}
&\text{sa} \\
&F(\vec{X}_j) = output(\vec{X}_j), \quad \forall \vec{X}_j \in E = \{\vec{X} : \vec{X} \text{ é DMU Pareto eficiente}\} \\
&\forall \vec{X}_j \ \exists \ \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big| \vec{X} = \vec{X}_j
\end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

O fato do modelo ser BCC (Banker et al., 1984) exige que a fronteira seja convexa ou seja, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} \le 0$. Com esta restrição adicional obtém-se o Teorema da Inexistência de Solução Ótima, cuja prova está em Soares de Mello et al. (2004). Este teorema garante que não existe solução que "melhor se aproxima", embora seja possivel encontrar soluçoes que se aproximam o suficiente para serem usadas. Este calculo é feito com uma abordagem semelhante à do método dos Elementos Finitos (Reddy, 1993).

3. SUAVIZAÇÃO DO MODELO DEA BCC N-DIMENSIONAL (N *inputs* e M *outputs*)

Em Soares de Mello et al. (2004) foi proposto um modelo de suavização para o caso tridimensional (2 *inputs* e 1 *output* ou 1 *input* e 2 *outputs*) que poderia ser facilmente estendido para os casos de maiores dimensões desde que se tivesse 1 *output* e vários *inputs*, ou 1 *input* e vários *outputs*. Para tal, adotou-se um aproximante polinomial único para toda fronteira, o que acarreta a eventual necessidade de trabalhar com funções polinomiais de grau mais elevado.

O presente trabalho visa tratar da multiplicidade simultânea de *inputs* e *outputs*, partindo do mesmo raciocínio desenvolvido em Soares de Mello et al. (2002). Para isso, foi proposto um polinômio único para toda a fronteira da seguinte forma:

$$P^{o}_{g_O,m}(z_1 \dots z_m) = P^{I}_{g_I,n}(x_1 \dots x_n) \text{, onde:} \qquad \text{(III)}$$

g_O ◊ grau do polinômio dos *outputs* (P_O)
g_I ◊ grau do polinômio dos *inputs* (P_I)
m ◊ número de variáveis (número de *outputs*)
n ◊ número de variáveis (número de *inputs*)
x_i ◊ *inputs*
z_i ◊ *outputs*

A fronteira suavizada será representada por uma equação que liga todos os *inputs* e *outputs*, onde os *outputs* serão representados por um polinômio P^O de grau g_O e m variáveis z_i, e os *inputs* serão representados por um polinômio P^I de grau g_I, a ser determinado, e n variáveis x_i.

3.1. Modelo Geral de Suavização BCC N-Dimensional

O polinômio dos *outputs* será de primeiro grau da seguinte forma:

$$P^{o}_{1,m}(z_1 \dots z_m) = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_m z_m \qquad \text{(IV)}$$

O uso de tal polinômio confere simplicidade aos cálculos. Assim, por simplicidade de linguagem, o grau do polinômio dos *inputs* (g_I) passará a ser referido apenas como g.

De uma forma geral, como foi visto, a equação da fronteira suavizada (III) será substituída pela equação (V), como a seguir:

$$P^{o}{}_{1,m}(z_1 ... z_m) = P^{I}{}_{g,n}(x_1 ... x_n) \qquad \text{(V)}$$

Os coeficientes da equação, que são os coeficientes dos polinômios, serão determinados através do problema de programação não linear, conforme modelo abaixo:

$$\min \left\{ \int_{x_{1\min}}^{x_{1\max}} ... \int_{x_{n\min}}^{x_{n\max}} \left[1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial z_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx_n ... dx_1 \right\}$$

sa

$$P^{o}{}_{1,m}(z_{1efi} ... z_{mefi}) = P^{I}{}_{g,n}(x_{1efi} ... x_{nefi}), \forall DMUextremo - eficiente \qquad \text{(VI.1)} \qquad \text{(VI)}$$

$$\frac{\partial z_j}{\partial x_i}(x_{1\max}, ..., x_{n\max}) \geq 0, \forall \mathrm{j=1..m, i=1..n}, x_i \qquad \text{(VI.2)}$$

$$\frac{\partial^2 z_j}{\partial x_i{}^2} \leq 0, \forall \mathrm{j=1..m, i=1..n}, x_i \qquad \text{(VI.3)}$$

A formulação (VI) representa o modelo geral DEA suavizado para qualquer número de variáveis de entrada e saída. A função objetivo é dada pela integral n-upla, onde $x_{i\ min}$ e $x_{i\ max}$ representam o menor e o maior valor de cada *input*. A restrição (VI.1) garante que as DMUs extremo-eficientes estejam contidas na fronteira suavizada. A restrição (VI.2) garante a monotonicidade crescente da fronteira, enquanto a convexidade é garantida por (VI.3).

Como as derivadas parciais de um *output* em relação a outro são constantes, a sua não inclusão na integral não afetaria a minimização. Essa inclusão seria necessária se fosse pretendido minimizar o comprimento de arco n-dimensional de uma superfície de nível $U=P^o-P^i$. Assim, a função objetivo apresentada está ligada à minimização de um comprimento de arco n-dimensional numa superfície de nível e mantém, assim, o mesmo referencial teórico da suavização de menor dimensão.

3.2. Determinação do grau do polinômio

Para começar, o grau g do polinômio P^I deve ser determinado. Soares de Mello et al. (2004) determinaram o grau do polinômio para o caso tridimensional com o princípio de que o número de variáveis de decisão deve ser maior que o número de restrições de igualdade, para não ocorrerem inviabilidades. O mesmo princípio será aqui aplicado.

Cada DMU extremo-eficiente corresponde a uma restrição de igualdade que impõe que ela se encontre na fronteira suavizada e, portanto o número de restrições é igual ao número de DMUs extremo-eficientes. E como as variáveis são exatamente os coeficientes dos polinômios aproximantes, o número de variáveis de decisão será o número de coeficientes dos polinômios, que possui uma relação exata com o grau do polinômio, como será mostrado a seguir.

No presente artigo, é apresentada uma forma de cálculo do grau do polinômio para qualquer número de *inputs* e *outputs.* Para isso, buscou-se uma fórmula geral para cálculo do número de coeficientes (ou termos) de um polinômio completo de grau g de *nvar* variáveis, representado genericamente por:

$$P_{g,n\mathrm{var}} = a_0 + \sum_k a_k x_1^{c_{1k}} x_2^{c_{2k}} ... x_{n\mathrm{var}}^{c_{n\mathrm{var}k}} \forall c_{ik} \text{ int que satisfaça } \sum_{i=1}^{n\mathrm{var}} c_{ik} \leq g \qquad \text{(VII)}$$

```
termos(0,0) = 0
termos(0,1) = 1
Para i = 1 até nvar
    termos(i,1) = i + 1
    Para j = 2 até g                                                    ( VIII )
        termos(0, j) = 1
        termos(i, j) = termos(i - 1, j) + termos(i, j - 1)
    Fim Para
Fim Para
```

O algoritmo (VIII) acima calcula recursivamente o número de coeficientes ou termos do polinômio completo para cada grau g e número de variáveis *nvar*, e através dele, a tabela 1 abaixo foi montada para até 10 variáveis e grau 10:

		Nvar (número de variáveis)									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
g (grau do polinômio)	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	2	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
	3	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
	4	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
	5	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
	6	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
	7	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
	8	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
	9	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378
	10	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756

Tabela 1: Número de coeficientes ou termos do polinômio completo para cada grau g e número de variáveis *nvar*.

Como pode ser observado, trata-se de uma matriz simétrica, isto é, o número de coeficientes do polinômio de grau g e com m variáveis é o mesmo que do polinômio de grau m e com g variáveis.

Para a equação da fronteira suavizada em estudo, conforme foi dito, o grau do polinômio dos *inputs* g deve ser determinado de acordo com o n° de DMUs extremo-eficientes. Para determinar tal valor, devemos destacar alguns pontos:

- Um coeficiente pode ser eliminado já que dividindo-se toda a equação pelo seu valor, a igualdade permanecerá. Convenciona-se, sem perda de generalidade, que z_1 terá seu coeficiente eliminado.
- Só é necessário um coeficiente a_0 (constante), pois o coeficiente a_0 dos *outputs* pode ser somado ao coeficiente a_0 dos *inputs*, por se tratar de uma equação.
- O número total de coeficientes ou variáveis de decisão será a soma do n° de coeficientes do polinômio dos *outputs* e o n° de coeficientes do polinômio dos *inputs.*
- O número de variáveis de *output* e *input*, m e n, respectivamente, são conhecidos.

De posse disso, pode-se determinar o grau do polinômio dos *inputs* da seguinte forma:

- Para o valor de m (número de *outputs*) conhecido e g (grau) sendo 1, procura-se na tabela o número de coeficientes, que será chamado *no*. No caso, vê-se que $no = m + 1$.

- Da mesma forma, seja *ni*, o n° de coeficientes do polinômio dos *inputs*.
- Para não haver inviabilidades, tem-se a seguinte condição:

N° DMUs extremo-eficientes < N° coeficientes = no + ni – 2 = m + ni – 1 (IX)

- Procura-se na tabela, para o valor de *n* (número de *inputs*) conhecido, o menor valor de *ni* que satisfaça:

ni > N° DMUs extremo-eficientes – m + 1 (X)

e em seguida, determina-se a que grau *g* corresponde.

3.3. Modelo BCC com 2 *inputs* e 2 *outputs*

Os procedimentos descritos são exemplificados para o modelo DEA BCC para 2 *inputs* e 2 *outputs*, que poderá ser facilmente estendido para qualquer número de variáveis. A equação da fronteira suavizada será, então, da seguinte forma:

$$z_1 + az_2 = P^{I}{}_{g,2} \qquad \text{(XI)}$$

Para determinar o grau g do polinômio, recorre-se ao procedimento anterior. Tem-se:
n = 2 ◊ número de *inputs*
m = 2 ◊ número de *outputs*

Da equação (IX), vem:

N° DMUs extremo-eficientes < ni + 1 ou
N° DMUs extremo-eficientes <= ni

A partir da relação acima é montada a tabela a seguir:

N° de DMUs extremo-eficientes	**Grau do polinômio**
1-3	1
4-6	2
7-10	3
11-15	4
16-21	5
22-28	6
29-36	7
37-45	8
46-55	9
56-66	10

Tabela 2: Relação entre o número de DMUs extremo-eficientes e o grau do polinômio para o caso de 2 *inputs* e 2 *outputs*.

Para o exemplo que será exposto no próximo item, onde se tem 6 DMUs extremo-eficientes, será necessário um polinômio de grau 2, ficando a equação da fronteira como a seguir:

$$z_1 + az_2 = b + cx_1 + dx_2 + ex_1{}^2 + fx_1x_2 + gx_2{}^2 \qquad \text{(XII)}$$

O modelo geral de suavização ficaria:

$$\min\left\{\int_{x_{1\min}}^{x_{1\max}}\int_{x_{2\min}}^{x_{2\max}}\left[1+\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z_2}{\partial x_2}\right)^2\right]dx_2dx_1\right\}$$

sa

$$z_{1efi}+az_{2efi}=b+cx_{1efi}+dx_{2efi}+ex_{1efi}{}^2+fx_{1efi}x_{2efi}+gx_{2efi}{}^2 \quad \text{(XIII.1)}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1}(x_{1\max},x_{2\max})\geq 0 \qquad \text{(XIII.2)}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_2}(x_{1\max},x_{2\max})\geq 0 \qquad \text{(XIII.3)}$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x_1}(x_{1\max},x_{2\max})\geq 0 \qquad \text{(XIII.4)}$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x_2}(x_{1\max},x_{2\max})\geq 0 \qquad \text{(XIII.5)}$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1{}^2}\leq 0,\forall x_1 \qquad \text{(XIII.6)}$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_2{}^2}\leq 0,\forall x_2 \qquad \text{(XIII.7)}$$

(XIII)

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x_1{}^2}\leq 0,\forall x_1 \qquad \text{(XIII.8)}$$

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x_2{}^2}\leq 0,\forall x_2 \qquad \text{(XIII.9)}$$

A formulação (XIII) representa o modelo DEA suavizado para 2 *inputs* e 2 *outputs*, onde:
Função objetivo:

- minimiza a pseudo-distância entre a fronteira suavizada e a original
- dada pela integral dupla, onde x_{1min}, x_{2min}, x_{1max} e x_{2max} representam o menor e o maior valor de cada *input*

Restrições:

- (XIII.1) ◊ DMUs extremo-eficientes estejam contidas na fronteira suavizada. Deve haver uma restrição destas para cada DMU extremo-eficiente.
- (XIII.2) a (XIII.5) ◊ monotonicidade crescente da fronteira
- (XIII.6) a (XIII.9) ◊ convexidade da fronteira

As restrições (XIII.6) a (XIII.9) são substituídas por uma restrição mais forte (XIV.6), que força todos os termos do polinômio a serem convexos. Isto é feito devido a impossibilidade de determinar os valores mais gerais possíveis dos coeficientes que garantam o cumprimento das restrições (XIII.6) a (XIII.9) para todos os valores de *x,* dependendo do grau do polinômio. O modelo (XIV) representa, assim, a formulação do modelo DEA BCC suavizado para 2 *inputs* e 2 *outputs*, utilizando um polinômio de grau 2, com garantia de convexidade.

$$\min\left\{\int_{x_{1\min}}^{x_{1\max}}\int_{x_{2\min}}^{x_{2\max}}\left[1+\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z_2}{\partial x_2}\right)^2\right]dx_2\,dx_1\right\}$$

sa

$$z_{1efi}+az_{2efi}=b+cx_{1efi}+dx_{2efi}+ex_{1efi}{}^2+fx_{1efi}x_{2efi}+gx_{2efi}{}^2 \quad \text{(XIV.1)}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1}(x_{1\max},x_{2\max})\geq 0 \quad \text{(XIV.2)}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_2}(x_{1\max},x_{2\max})\geq 0 \quad \text{(XIV.3)}$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x_1}(x_{1\max},x_{2\max})\geq 0 \quad \text{(XIV.4)}$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x_2}(x_{1\max},x_{2\max})\geq 0 \quad \text{(XIV.5)}$$

$$\text{e, g}\leq 0 \quad \text{(XIV.6)}$$

(XIV)

3.4. Exemplo de Utilização do Modelo BCC para 2 *inputs* e 2 *outputs*

Para mostrar a utilização do modelo exposto no presente artigo, será utilizada matriz de dados apresentada na tabela 3, que contém 10 DMU´s, 2 *inputs* e 2 *outputs*:

DMUs	X1	X2	Z1	Z2
A	680.00000	1.00000	50.00000	120.00000
B	1500.00000	1.00000	50.00000	240.00000
C	610.00000	2.00000	50.00000	130.00000
D	860.00000	2.00000	90.00000	250.00000
E	1400.00000	2.00000	90.00000	500.00000
F	220.00000	6.00000	75.00000	220.00000
G	290.00000	6.00000	75.00000	1.50000
H	1800.00000	0.00000	100.00000	130.00000
I	2800.00000	0.00000	100.00000	260.00000
J	4000.00000	0.00000	100.00000	510.00000

Tabela 3: Matriz de dados utilizada no modelo DEA BCC

O *software* SIAD (Sistema Integrado de Apoio à Decisão), (Angulo Meza et al., 2003), foi utilizado para se encontrar as DMU´s extremo-eficientes. Foram identificadas, no modelo BCC, 6 DMU´s extremo-eficientes, a saber: A, D, E, F, H e J.

Através da relação da Tabela 2, tem-se que é necessário um polinômio dos *inputs* (P^I) de grau 2, e então a equação (XII) representa a equação da fronteira suavizada, e (XIV) é o modelo a ser utilizado para o caso em estudo.

Utilizando os valores da Tabela 3 nas equações (XIV), chega-se ao seguinte sistema (XV) que deverá ser resolvido para se encontrar os coeficientes do polinômio.

$$\min\left\{\int_{220}^{4000}\int_{0}^{6}\left[1+\left(c+2ex_1+fx_2\right)^2+\left(d+fx_1+2gx_2\right)^2+\left(\frac{c+2ex_1+fx_2}{a}\right)^2+\left(\frac{d+fx_1+2gx_2}{a}\right)^2\right]dx_2\,dx_1\right\}$$

sa

$50+120\cdot a=b+680\cdot c+1\cdot d+680^2\cdot e+680\cdot 1\cdot f+1^2\cdot g$ (XV.1)

$90+250\cdot a=b+860\cdot c+2\cdot d+860^2\cdot e+860\cdot 2\cdot f+2^2\cdot g$ (XV.2)

$90+500\cdot a=b+1400\cdot c+2\cdot d+1400^2\cdot e+1400\cdot 2\cdot f+2^2\cdot g$ (XV.3)

$75+220\cdot a=b+220\cdot c+6\cdot d+220^2\cdot e+220\cdot 6\cdot f+6^2\cdot g$ (XV.4)

$100+130\cdot a=b+1800\cdot c+0\cdot d+1800^2\cdot e+1800\cdot 0\cdot f+0^2\cdot g$ (XV.5)

$100+510\cdot a=b+4000\cdot c+0\cdot d+4000^2\cdot e+4000\cdot 0\cdot f+0^2\cdot g$ (XV.6)

$c+2\cdot 4000\cdot e+6\cdot f\geq 0$ (XV.7)

$d+4000\cdot f+2\cdot 6\cdot g\geq 0$ (XV.8)

$e\leq 0$ (XV.9)

$g\leq 0$ (XV.10)

(XV)

Resolvendo a integral dupla, chega-se a (XVI) que deverá ser resolvido por algum *software* de programação quadrática.

$$\min\left\{\begin{array}{l}8000(36dg+3d^2+3c^2+3a^2+16000036a^2f^2+144a^2g^2+18cf+3a^2c^2+18a^2cf+\\16000036f^2+144g^2+3a^2d^2+36a^2dg+72000ef+72000fga^2+12000fd+\\64000000e^2+72000fg+72000a^2ef+24000ce+12000a^2fd+64000000a^2e^2+\\24000a^2ce)/a^2-440(36dg+3d^2+3c^2+3a^2+48436a^2f^2+144a^2g^2+18cf+\\3a^2c^2+18a^2cf+48436f^2+144g^2+3a^2d^2+36a^2dg+3960ef+3960fga^2+\\660fd+193600e^2+3960fg+3960a^2ef+1320ce+660a^2fd+193600a^2e^2+\\1320a^2ce)/a^2\end{array}\right\}$$

sa

$50+120\cdot a=b+680\cdot c+1\cdot d+680^2\cdot e+680\cdot 1\cdot f+1^2\cdot g$ (XVI.1)

$90+250\cdot a=b+860\cdot c+2\cdot d+860^2\cdot e+860\cdot 2\cdot f+2^2\cdot g$ (XVI.2)

$90+500\cdot a=b+1400\cdot c+2\cdot d+1400^2\cdot e+1400\cdot 2\cdot f+2^2\cdot g$ (XVI.3)

$75+220\cdot a=b+220\cdot c+6\cdot d+220^2\cdot e+220\cdot 6\cdot f+6^2\cdot g$ (XVI.4)

$100+130\cdot a=b+1800\cdot c+0\cdot d+1800^2\cdot e+1800\cdot 0\cdot f+0^2\cdot g$ (XVI.5)

$100+510\cdot a=b+4000\cdot c+0\cdot d+4000^2\cdot e+4000\cdot 0\cdot f+0^2\cdot g$ (XVI.6)

$c+2\cdot 4000\cdot e+6\cdot f\geq 0$ (XVI.7)

$d+4000\cdot f+2\cdot 6\cdot g\geq 0$ (XVI.8) (XVI)

$e\leq 0$ (XVI.9)

$g\leq 0$ (XVI.10)

Após resolver o problema (XVI) chegou-se aos seguintes resultados para os coeficientes:

Variável	Valor
a	0.239897198
b	-74.33077285
c	0.146909135
d	66.23839676
e	-1.81849E-05
f	0.002626114
g	-6.395237656

Tabela 4: Valor das variáveis de decisão do problema de suavização para o caso de estudo

Dessa forma, a fronteira DEA BCC original do caso de estudo poderá ser substituída pela fronteira suavizada representada pela equação (XVII):

$$z_1 + 0.23989 z_2 = -74.33077 + 0.14691 x_1 + 66.23839 x_2 - 0.00002 x_1^2 + 0.00262 x_1 x_2 - 6.39523 x_2^2 \quad \text{(XVII)}$$

4. CONCLUSÕES

Foi apresentada neste artigo uma metodologia para resolver o problema de determinação de pesos únicos em modelos DEA BCC com multiplicidade simultânea de *inputs* e *outputs*. A metodologia proposta é uma extensão da metodologia desenvolvida em Soares de Mello et al. (2004) que tem como base a substituição da fronteira DEA original (linear por partes) por outra suavizada (com derivadas contínuas). A fronteira suavizada será representada por uma equação polinomial que liga os *inputs* aos *outputs*.

O modelo de suavização aqui proposto apresentou um aumento do número de cálculos algébricos em relação ao modelo N-dimensional sem multiplicidade simultânea dos *inputs* e *outputs* (Soares de Mello et al., 2004), e esse número torna-se cada vez maior com o aumento do número de *inputs*, *outputs* e DMUs extremo-eficientes. Como as várias etapas dos cálculos são realizadas em programas diferentes, e a etapa mais demorada é a transposição de dados entre eles, torna-se mais evidente e vantajosa a necessidade de desenvolver um *software* específico para o problema da suavização, que permitirá o estudo de casos mais complexos.

Foi estudado um caso de 2 *inputs* e 2 *outputs*, a partir de uma matriz de dados com 10 DMU´ s, para mostrar a utilização do modelo proposto. Não foi interesse entrar em detalhes do caso a ser estudado, motivo pelo qual partiu-se diretamente da matriz de dados sem maiores explicações sobre os significados de cada variável assim como o problema em si.

O presente estudo veio a suprir a necessidade levantada em Soares de Mello et al. (2004) de desenvolvimento para o caso de múltiplos *inputs* e *outputs*, mas os modelos com retornos constantes de escala (CCR) ainda precisam ser contemplados.

Por fim, deve ser mencionado que o modelo de suavização permite eliminar dois dos grandes problemas em DEA: regiões Pareto ineficientes e faces de dimensão não completa. O primeiro devido à existência de uma restrição de monotonicidade, e o segundo pelo fato de a fronteira ser descrita por uma única equação polinomial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W., Some models for estimating technical scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis, Management Science 30 (9) (1984) 1078-1092.

[2] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., Measuring the Efficiency of Decision-Making Units, European Journal of Operational Research 2 (1978) 429-444.
[3] Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K., Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. Kluwer Academic Publishers, USA (2000).
[4] Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B., Estellita Lins, M.P., Redistribuição de inputs e outputs em modelos de análise de envoltória de dados com ganhos de soma zero, Pesquisa Operacional, 24 (2) (2004) (no prelo).
[5] Estellita Lins, M.P., Angulo-Meza, L., Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão, Editora da COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil (2000).
[6] Estellita Lins, M.P., Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B., Soares de Mello, A.J.R., Olympic ranking based on a Zero Sum Gains DEA model, European Journal of Operational Research 148 (2) (2003) 85-95.
[7] Reddy, J.N., Introduction to the Finite Element Method, McGraw-Hill (1993).
[8] Rosen, D., Schaffnit, C., Paradi, J.C., Marginal rates and two dimensional level curves in DEA, Journal of Productivity Analysis 9 (3) (1998) 205-232.
[9] Soares de Mello, J.C.C.B., Suavização da fronteira DEA com o uso de métodos variacionais, Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Produção, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil (2002).
[10] Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Biondi Neto, L., Estellita Lins, M.P. Suavização da Fronteira DEA: O caso BCC tridimensional, Investigação Operacional, 24 (2004).
[11] Soares de Mello, J.C.C.B., Estellita Lins, M.P., Gomes, E.G., Construction of a smoothed DEA frontier, Pesquisa Operacional, 22 (2) (2002) 183-201.