RELATÓRIOS DE PESQUISA EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO v.12, n.8, p. 104-117.

CPP-TRI: UM MÉTODO DE CLASSIFICAÇÃO ORDENADA BASEADO EM COMPOSIÇÃO PROBABILÍSTICA

Annibal Parracho Sant'Anna
Universidade Federal Fluminense

Helder Gomes Costa
Universidade Federal Fluminense

Valdecy Pereira
Universidade Federal Fluminense

Resumo

Propõe-se aqui um método de classificação multicritério baseado em relações de sobreclassificação que prescinde completamente da atribuição de pesos aos critérios. Este método é baseado no ELECTRE-TRI-nC, distinguindo-se por substituir o uso de patamares de indecisão pela adição de perturbações aleatórias para levar em conta a imprecisão nas avaliações. Assim os valores segundo cada critério, tanto para as avaliações das alternativas quanto para os perfis característicos das classes são tratados como parâmetros de locação de distribuições de probabilidades e as comparações são realizadas entre tais distribuições. Isto permite que a credibilidade das relações e a composição dos critérios sejam baseadas em probabilidade conjuntas. O modelo proposto foi aplicado aos dados do caso reportado em Almeida Dias *et al.* (2012), sendo os resultados contrastados.

Palavras chave: Multicritério, ELECTRE –TRI, Composição probabilística.

Artigo submetido em 21/11/2012. Versão final recebida em 27/12/2012. Publicado em 28/12/2012.

1. Introdução

Costa (2006) reporta que há algumas diferentes formas de se classificar um problema de decisão: quanto ao nível de conhecimento dos cenários futuros (incerteza, risco e certeza), quanto ao número de critérios (monocritério ou multicritério), quanto à presença ou não de flutuações estatísticas (determinísticas ou estocásticas) e quanto à situação de decisão.

As situações de decisão, conforme Roy e Boyssou (1985) e Gomes *et al.* (2002), podem ser agrupadas em quatro problemáticas:

- Ordenação (*ranking*), na qual se busca construir uma lista ordenada das alternativas, das melhores para as piores. Esta situação é denotada por *Problemática P.γ (gama)* em Roy e Boyssou (1985).
- Escolha (*choice*) na qual se busca identificar a melhor alternativa ou selecionar um conjunto limitado das melhores alternativas. Esta situação é denotada por *Problemática P.α (alfa)* em Roy e Boyssou (1985).
- Classificação (*classification / sorting*), na qual a intenção é classificar as alternativas em grupos homogêneos pré-definidos e que guardem algum tipo de ordem de preferência ou importância entre si, tal como acontece em classificações do tipo ABC de Pareto. Esta situação é denotada por *Problemática P.β (beta)* em Roy e Boyssou (1985).
- Descrição (*description*), cujo propósito é identificar e descrever as principais características que distinguem as alternativas. Esta situação é denotada por *Problemática P.δ (delta)* em Roy e Boyssou (1985).

A problemática P.α, de escolha, tem sido associada na literatura, principalmente naquela referente ao multicritério, à escolha de uma única alternativa. Mas, pode abranger a escolha de um conjunto de alternativas ou uma cesta de alternativas: como no caso das modelagens da programação linear (onde se busca uma cesta ou "mix" de alternativas). Ou seja: problemas como o da formação de um portfólio podem ser classificados como problemas de escolha. Neste contexto, no caso da escolha de cestas de alternativas, Belton e Stewart (2002, p. 15) chamam a atenção para o necessário cuidado com eventuais sinergias entre as alternativas que vierem a compor a cesta escolhida. Conforme Saaty (1999), a sinergia entre as alternativas foi um dos fatores que motivou a criação do método Analytic Network Process (ANP).

Costa (2006) insere nesta classificação uma outra problemática, a de distribuição. Na situação de **Distribuição (*sharing*)**, enquadram-se os problemas nos quais recursos finitos devem ser compartilhados ou distribuídos por um grupo de elementos. Encaixam-se, por exemplo, nesta categoria as situações de decisão nas quais se objetiva distribuir recursos entre um conjunto de alternativas, identificando-se o percentual dos recursos que cabe a cada alternativa. Neste tipo de classificação também podem ser categorizados os problema da atribuição de pesos a critérios, nos quais o decisor deseja distribuir importância entre os critérios de um conjunto de critérios previamente definido.

Uma outra observação feita por Costa (2006) refere-se à *Problemática P.β (beta)*. Costa (2006) sugere que o termo *classificação ordenada* (no lugar do termo classificação) seja associado a esta problemática. Esta sugestão deve-se ao fato de que em *P.β.*, na análise de Roy e Boyssou (1985), há uma relação de ordem entre as classes ou categorias às quais as alternativas são associadas. Caso não haja uma ordem de preferência ou importância entre as classes, o termo *classificação* – sem a qualificação de *ordenada* - poderia ser usado para descrever a problemática de *categorização*, que cobriria uma categoria de problemas não prevista nas problemáticas apontadas por Roy e Boyssou (1985), tais como: a atribuição de diagnósticos a pacientes (hipertensos, cardíacos, diabéticos...); classificação de espécies animais (vertebrados, invertebrados, mamíferos, batráquios...) ou vegetais (angiospermas, monocotiledôneos...), dentre outros problemas de classificação nos quais não há uma relação de ordem entre as classes.

O problema de classificação ordenada por muitos critérios apresenta dificuldades que têm suscitado o uso de modelos e métodos complexos, dentre os quais se destacam os métodos ELECTRE TRI (Yu (1992) e Mousseau *et al.* (1999)) com classes de referência que são definidas por limites de classe, os quais são usualmente determinados através de julgamentos subjetivos; e, suas variações: ELECTRE TRI-C (Almeida-Dias *et al.*, 2010; Figueira *et al.*, 2011) e ELECTRE-TRI-nC (Almeida-Dias *et al.*, 2012) cujas classes de referência são definidas por perfis representativos, um perfil para cada classe no caso do ELECTRE-TRI-C e um número qualquer de perfis no caso do ELECTRE-TRI-nC.

A modelagem apoiada nestes métodos tem envolvido a definição de certos parâmetros, tais como os pesos dos critérios, os limites de classe e os limites de hesitação (preferência e indiferença) e veto. Tervonen *et al.* (2009) propõem, para contornar a dificuldade na determinação desses parâmetros, a modelagem dos mesmos como variáveis aleatórias e que a decisão quanto à classificação se baseie no volume do conjunto dos pesos que conduz a cada classificação. A modelagem dos patamares de hesitação e veto em um segundo nível por Tervonen *et al.* (2009) também permite revelar a sensibilidade dos resultados da classificação ordenada à influência desses parâmetros.

Apesar dos avanços já alcançados, este problema continua em aberto. O presente trabalho apresenta uma abordagem baseada em descrições probabilísticas tanto para os perfis que definem as classes antecipadamente, quanto para as medidas resultantes dos julgamentos de valor das alternativas a serem classificadas. A modelagem com distribuições de probabilidades é mais flexível que a modelagem baseada na fixação de patamares, além de exigir menos esforço do decisor. Pois, em vez de pedir a fixação de parâmetros aos usuários, propõe-se uma distribuição normal com variância estimada a partir dos dados coletados sobre as alternativas.

2. Abordagens para o Problema da Classificação Ordenada Multicritério

Textos clássicos como Arrow (1963), Roy (1968), Fishburn (1973), Saaty (1980), Changkong e Haimes (1983), Zeleny (1982) e Roy e Boyssou (1985) consideram que a decisão em um ambiente complexo envolve a consideração de múltiplos critérios, dando origem ao que se convencionou denotar por Apoio Multicritério à Decisão (AMD).

As abordagens de AMD são classificadas por Roy e Boyssou (1985) e Vincke (1989) em: de critério único de síntese, interativas e de subordinação.

Changkong e Haimes (1983) identificam os métodos baseados em critério único de síntese pela presença de uma função utilidade global U(x) que agregue diferentes funções de utilidade locais $u_l(x)$ em uma função: $U(x) = U(u_1(x), u_2(x), ..., u_r(x))$. Dentre os métodos e teorias que buscam um critério único de síntese, destacam-se o AHP (Analytic Hierarchy Process, Saaty (1977; 1980), o SMARTS (Simple-Multiattribute Rating Technique, Edwards (1977)) e o MAUT (Multi-Attribute Utility Theory), apresentada em Fishburn (1970) e consolidada em Keeney e Raiffa (1976).

Nas abordagens interativas, conforme Antunes et al. (1989), o analista de decisão interage com o modelo sequencialmente em múltiplas interações, nas quais alternam fases de cálculo com fases de decisão, buscando-se uma solução única que seja ótima ou que esteja próxima do ponto ótimo.

Finalmente, no âmbito dos Métodos de Subordinação – também denominados Métodos de Sobreclassificação – um conjunto finito de alternativas (A) é valorado sob uma família de critérios (G), construindo-se, entre as alternativas, relações não compensatórias que não criam uma função única de síntese que agregue os desempenhos alcançados pelas alternativas.

Buscando estabelecer uma ilustração didática da diferença entre os métodos de agregação em uma função única de valor e os métodos de sobreclassificação, Costa (2005) e Costa *et al*. (2007) utilizam um exemplo baseado em uma partida de volleyball. A seguir apresenta-se uma revisão deste exemplo:

> Considere-se uma partida de volleyball entre os times A e B em que no primeiro set A ganha de B por 25 a 0 e B ganha de A nos três sets seguintes por 25 a 20. Duas análises podem ser feitas, em um extremo dando máxima importância aos números de pontos nos sets e na outra reduzindo ao máximo a importância desses valores numéricos:
> 1) Usar uma função agregadora aditiva (soma de pontos) para obter o resultado final. Neste caso A seria o vencedor da partida por 85 a 75.
> 2) Usar o número de sets para definir o vencedor. Neste caso, B seria o vencedor por 3 a 1. Neste caso, cada set tem peso 1 e o vencedor do set recebe esta pontuação, independente do valor dos pontos do set. A pontuação obtida em um set não é compensada pela pontuação obtida em outro set.
> O princípio fundamental dos métodos de sobreclassificação pode ser considerado semelhante a esta segunda abordagem, se considerarmos que cada set equivale a um dos critérios da análise multicritério.

Conforme reportado em Costa *et al*. (2007), os métodos de sobreclassificação têm origem na família ELECTRE – uma outra família de métodos de subordinação bem conhecida é a família Promethée, originada em Brans et al. (1984). A família ELECTRE é composta, atualmente, pelos seguintes métodos: ELECTRE I (Roy, 1968), ELECTRE II (Roy e Bertier, 1971), ELECTRE III (Roy, 1978), ELECTRE IV (Roy e Hugonnard, 1981), ELECTRE IS (Roy e Mousseau, 1985), ELECTRE TRI (Mousseau *et al*., 1999; Yu, 1992), ELECTRE TRI-C (Almeida-Dias *et al.*, 2010) e ELECTRE TRI–nC (Almeida-Dias *et al.*,2012).

Estes três últimos estão voltados para a classificação ordenada. O ELECTRE TRI classifica as alternativas em classes separadas por fronteiras definidas por desempenhos segundo os múltiplos critérios, as quais são definidas por julgamentos de valor e estão sujeitas a imprecisão modelada por patamares de variação dos valores para cada critério. No ELECTRE TRI-C, um vetor de desempenhos central substitui os vetores de desempenho de fronteira. O ELECTRE-TRI-nC estende o ELECTRE-TRI-C, admitindo que cada classe seja identificada por um número n qualquer de perfis, em vez de um único.

3. Apresentação do Método

O problema aqui considerado é o de classificar alternativas identificadas por avaliações segundo múltiplos critérios em classes determinadas por um número variável de perfis segundo os mesmos critérios. O método proposto baseia-se na transformação probabilística proposta por Sant'Anna (2002). As avaliações numéricas iniciais segundo cada critério são tratadas como parâmetros de locação de distribuições de probabilidades.

Seguindo os princípios da modelagem econométrica clássica, assume-se, além de distribuições normais, idêntica distribuição e independência entre as perturbações que provocam a imprecisão nas medidas. E os dados disponíveis são usados para estimar as variâncias dessas distribuições normais. Caso se disponha de informação aconselhando outras distribuições, tal informação pode ser usada sem alterações substanciais nos cálculos.

Uma vez representada a avaliação segundo cada critério por uma distribuição de probabilidade é possível calcular a probabilidade de cada alternativa ter uma avaliação acima ou abaixo dos perfis de cada classe, ainda segundo cada critério. Dessas probabilidades de sobreclassificação segundo cada critério é, então, possível derivar classificações globais sem atribuir pesos aos critérios, usando as abordagens já consideradas para composição probabilística de preferências por Sant'Anna (2002).

Por exemplo, supondo independentes as avaliações segundo diferentes critérios, a probabilidade de uma alternativa ter avaliação acima dos perfis de uma classe segundo todos os critérios é o produto das probabilidades segundo cada critério isoladamente. O mesmo vale para a probabilidade de ter avaliação abaixo segundo todos os critérios. A alternativa então será alocada na classe para a qual seja mínima a diferença entre esses dois produtos.

Caso seja possível e desejável atribuir pesos aos critérios, em vez de probabilidades conjuntas poderemos usá-los, tratando as probabilidades de preferência segundo cada critério como probabilidades condicionais e os pesos como probabilidades marginais dos critérios.

O método se aplica com óbvias adaptações se, em vez de identificação das classes por um número de perfis maior que 1, houver um único perfil para cada classe, como no ELECTRE-TRI-C, ou perfis de fronteira como no ELECTRE-TRI-b, o ELECTRE-TRI original.

Para formular mais precisamente o acima exposto, considerem-se os seguintes termos:

- $G = \{g_1, \dots, g_m\}$) uma família formada por m critérios, identificados pela letra g.
- $A = (a_1, \dots, a_m)$ um vetor do R^m que guarda as avaliações de uma alternativa genérica A, segundo cada um dos m critérios em G.
- $C = \{C_1, \dots, C_r\}$ um conjunto de r classes ordenadas, nas quais as alternativas serão classificadas, de tal sorte que a alternativa é tanto melhor quanto maior o valor numérico do índice da classe em que for alocada. Para identificar a classe C_i, para cada i de 1 a r, são informados n(i) perfis, os quais são vetores de avaliações segundo os m critérios:

$$\begin{cases} \mathrm{Ci1} = (\mathrm{Ci11}, \dots, \mathrm{Ci1m}) \\ \mathrm{Ci2} = (\mathrm{Ci21}, \dots, \mathrm{Ci2m}) \\ \mathrm{Ci3} = (\mathrm{Ci31}, \dots, \mathrm{Ci3m}) \\ \dots \\ \mathrm{Cin(i)} = (\mathrm{Cin(i)1}, \dots\ \mathrm{Cin(i)m}) \end{cases} \qquad [1]$$

Para facilitar a comparação das probabilidades de sobreclassificação relativas a diferentes classes, convém que o número de perfis de cada classe seja constante, isto é, n(i) = n, para todo i. Pode-se abrir mão desta hipótese sem alterar os procedimentos de classificação do método. Alternativamente, caso seja variável esse número, pode-se, no momento da execução dos procedimentos de classificação, acrescentar às classes com menos perfis, perfis com valores iguais às médias dos valores informados para a classe, até atingir o número máximo de perfis informados para a classe com mais perfis informados. Observa-se que a adoção de um conjunto de n(i) perfis para a definição de uma classe n(i), é um procedimento presente no ELECTRE TRI-nC.

3.1. Estimação da Variância

Para cada k de 1 a m, tanto as coordenadas a_k da alternativa quanto as coordenadas C_{ijk} dos C_{ij} para i de 1 a r e j de 1 a n são consideradas médias de distribuições normais independentes com mesma variância. Esta variância deve, em princípio, ser suficientemente grande para que a probabilidade de a alternativa pertencer mesmo às classes com valores segundo o k-ésimo critério mais afastados de a_k não seja tão pequena que torne inútil a informação dada pelos outros critérios - ou seja, nenhum critério tenha sozinho o poder de veto a nenhuma classificação. Este princípio pode ser satisfeito, na prática, estimando a variância das medidas segundo cada critério pela variância do conjunto de medições registradas segundo este critério para várias alternativas a classificar ou para os vários perfis oferecidos como representativos das classes.

Este procedimento pode conduzir a superestimação, pois a variância em uma tal amostra conjuga a variância interna à classe com a variância entre classes e só a primeira dessas componentes deve ser atribuída à incerteza inerente a cada medida, supondo-se que a alternativa se ajusta realmente a uma das classes. Admitindo como válido este argumento e faltando informação sobre a magnitude relativa das variâncias intra-classes e entre-classes, sugere-se, então, estimar a variância pela metade da variância observada.

3.2. Cálculo das Probabilidades de Preferência segundo cada Critério Isoladamente

Uma vez substituídas as medidas exatas a_k e C_{ijk} por distribuições de variáveis aleatórias X_k e Y_{ijk} centradas nessas medidas, podemos calcular probabilidades de sobreclassificação. Denotemos por A_{ik}^+ e A_{ik}^- as probabilidades de a alternativa A apresentar valor respectivamente acima e abaixo dos valores informados para o critério k-ésimo nos perfis da classe i-ésima. Por independência Por independência entre as perturbações afetando diferentes alternativas e diferentes perfis,

$$Aik^+ = \prod_j P[Xk>Yijk] \qquad [2]$$

e

$$Aik^- = = \prod_j P[Xk< Yijk]. \qquad [3]$$

3.3. Avaliação da Credibilidade das Relações

A composição de escores globais de posição em relação às classes a partir das probabilidades de sobreclassificação segundo critérios isolados leva em conta o ponto de vista do decisor quanto à importância do critério. Essa importância dos critérios pode ser dada por pesos w_k, entendidos como probabilidades marginais de escolha de cada critério, que serão combinadas com as probabilidades A_{ik}^+ ou A_{ik}^-, neste caso vistas como probabilidades condicionais, nos termos do Teorema da Probabilidade Total.

Teremos então as credibilidades A_i^+ e A_i^- de a alternativa A estar acima ou abaixo da classe i, dadas, respectivamente por:

$$Ai^+ = \Sigma_k\, w_k A_{ik}^+ \qquad [4]$$

e

$$Ai^- = \Sigma_k\, w_k A_{ik}^- \qquad [5]$$

Estas fórmulas propiciam compensações numéricas entre conceitos qualitativamente diferentes, que podem ser evitadas se são usadas probabilidades conjuntas. Supondo mais uma vez independência, agora entre as avaliações por diferentes critérios, as probabilidades conjuntas de estar acima e abaixo de todos os perfis da classe por todos os critérios são dadas por

$$A_i^+ = \prod_k A_{ik}^+ \qquad [6]$$

e

$$A_i^- = \prod_k A_{ik}^-. \qquad [7]$$

Se usamos os valores acima divididos pelos valores obtidos na hipótese de ao compararmos a alternativa com os perfis da classe termos todas as probabilidades $P[X_k > Y_{ijk}]$ e $P[X_k < Y_{ijk}]$ iguais a ½, obtemos números mais próximos. Isto torna mais fácil a comparação entre os resultados de análises com diferentes números de perfis. Teremos, neste caso, as seguintes expressões finais para as credibilidades:

$$A_i^+ = \prod_k A_{ik}^+ * 2^{n(i)m} \qquad [8]$$

e

$$A_i^- = \prod_k A_{ik}^- * 2^{n(i)m}. \qquad [9]$$

3.4. O Procedimento de Classificação

O procedimento de classificação é baseado na comparação das diferenças $A_i^+ - A_i^-$, tal como feito no cálculo do fluxo líquido (ϕ) dos métodos Promethée (Brans *et al.*, 1984). Se os perfis estão definidos de modo que as classes estão efetivamente ordenadas em ordem crescente, essas diferenças constituem uma sucessão decrescente (se isto não acontece, os perfis precisam ser revistos). A regra de classificação é simples: a alternativa A pertence à classe i para a qual essa diferença é mais próxima de zero.

Um algoritmo eficiente para aplicar essa regra pode ser desenvolvido com duas etapas. Primeiro, se identifica o menor valor de i para o qual é negativa a diferença $A_i^+ - A_i^-$. Se este valor é 1, a alternativa é classificada na primeira classe. Caso contrário, comparam-se os valores absolutos das diferenças $A_i^+ - A_i^-$ para tal classe e para a que a precede e classifica-se a alternativa naquela em que esse valor absoluto seja menor.

Esta regra pode ser exposta formalmente nos seguintes termos, denotando-se por C(A) a classe em que a alternativa A vem a ser classificada:

- Parte-se da classificação provisória $CP(A) = \text{mín}\{i: A_i^+ - A_i^- < 0\}$ [10]
- Se $\{i: A_i^+ - A_i^- < 0\}$ é vazio, a alternativa pertence à classe mais alta.
- Se $CP(A) = 1$, a alternativa pertence à classe C_1.
- Se $CP(A)>1$, se $A_{CP(A)}^- - A_{CP(A)}^+ < A_{CP(A)-1}^+ - A_{CP(A)-1}^-$, então $C(A) = CP(A)$. [11]
- Caso contrário, $C(A) = CP(A)-1$. [12]

3.5. Planos de corte alternativos

Para oferecer informação sobre a incerteza na classificação final, classificações alternativas resultantes da aplicação de planos de corte menos exigentes para as credibilidades de localização acima ou abaixo dos perfis da classe podem ser produzidas. Esses planos de corte são identificados por percentuais aplicados para reduzir a exigência de um ou do outro lado da classe.

Assim, a classificação benevolente para a alternativa A com plano de corte determinado pelo percentual c a colocará na classe $Cc(A)^+$ para a qual seja mínimo o valor absoluto da diferença $A_i^+ - cA_i^-$. Do mesmo modo, a classificação puxando para baixo, $Cc(A)^-$, será na classe para a qual seja mínimo o valor absoluto da diferença $cA_i^+ - A_i^-$.

Os valores de $Cc(A)^+$ e $Cc(A)^-$ podem ser obtidos por procedimentos de classificação ascendente e descendente desenvolvidos de forma análoga à descrita na seção anterior, a qual corresponde aos planos de corte com o percentual de 100%.

4. Exemplo de Aplicação

Para ilustrar as peculiaridades do método, o mesmo é aqui aplicado ao exemplo estudado por Almeida Dias, Figueira e Roy (2012). Neste estudo, cinco possíveis classes são descritas por 1, 2 ou 3 perfis segundo sete critérios e 24 alternativas são classificadas. A Tabela 1 mostra os perfis identificadores das classes.

Na aplicação original, aos critérios g1, g2, g6 e g7 são atribuídos os maiores pesos. Além disso, para esses critérios são estipulados patamares de veto que não existem para os outros três. Os resultados dessa análise serão comparados aqui com os obtidos empregando, simplesmente, as probabilidades conjuntas de valores respectivamente acima e abaixo das classes em todos os critérios.

Tabela 1: Perfis de Referência das Classes

Classes	*Perfis*	*Critérios*						
		*g*1	*g*2	*g*3	*g*4	*g*5	*g*6	*g*7
C1	*c*11	5	5	5	5	5	5	5
***C*2**	*c*12	20	20	20	20	20	20	20
	*c*22	30	30	30	30	30	30	30
***C*3**	*c*13	40	40	40	40	40	40	40
	*c*23	65	65	65	65	65	65	65
***C*4**	*c*14	70	70	70	85	85	85	85
	*c*24	85	85	85	85	70	70	70
	*c*34	75	75	75	75	75	75	75
***C*5**	*c*15	95	95	95	95	95	95	95

Fonte: Almeida Dias, Figueira e Roy (2012).

Na Tabela 2 estão as avaliações das alternativas pelos 7 critérios..

Tabela 2: Avaliações de Alternativas de Teste pelos 7 Critérios

Alternativas	*g*1	*g*2	*g*3	*g*4	*g*5	*g*6	*g*7
***a*1**	10	10	10	10	10	10	10
***a*2**	10	20	20	10	20	20	10
***a*3**	15	5	10	15	10	5	15
***a*4**	15	15	15	15	15	15	15
***a*5**	20	20	50	50	50	20	20
***a*6**	30	30	45	45	45	30	30
***a*7**	5	50	50	50	50	50	90
***a*8**	35	35	35	35	35	35	35
***a*9**	25	25	25	50	50	50	50
***a*10**	30	30	30	40	40	40	40
***a*11**	30	45	45	45	45	45	30
***a*12**	35	35	35	45	45	45	45
***a*13**	35	35	35	70	70	70	70
***a*14**	45	45	30	30	30	45	45
***a*15**	65	25	25	25	25	25	65
***a*16**	85	85	50	50	50	15	15
***a*17**	65	65	85	85	85	65	65
***a*18**	70	70	70	70	70	70	70
***a*19**	70	70	70	95	95	95	95
***a*20**	75	75	75	80	80	80	80
***a*21**	80	80	80	80	80	80	80
***a*22**	85	50	85	85	85	50	85
***a*23**	75	75	75	95	95	95	95
***a*24**	90	90	80	80	80	90	90

Fonte: Almeida Dias, Figueira e Roy (2012).

4.1. Transformação em Probabilidades

A transformação das avaliações iniciais segundo cada critério em probabilidades de preferência exige a determinação da variância da distribuição normal atribuída a cada medida. A cada critério pode ser atribuída uma variância própria. Esta variância será aqui estimada tomando como base a variância observada nas medidas segundo o critério nos perfis de referência. Admitindo que parte da variância observada deva ser atribuída à variação entre as alternativas e não às perturbações internas, adota-se uma estimativa para cada variância igual à metade desses valores observados. As variâncias observadas nos conjuntos dos valores das alternativas avaliadas são um pouco maiores e os resultados obtidos a partir delas são muito semelhantes.

Para exemplificar o procedimento de transformação em probabilidades, consideremos uma alternativa como A10, com a avaliação 30 no primeiro critério. Sua posição relativa à quarta classe, em que os perfis de referência têm neste critério os valores 70, 75 e 85, é dada, quanto a esse critério, pelas probabilidades de uma variável aleatória com distribuição normal de média 30 e o desvio-padrão estimado, de 15,6, assumir valores acima e abaixo dos valores assumidos simultaneamente por três variáveis aleatórias normais com mesmo desvio-padrão e médias 70, 75 e 85, respectivamente. Essas duas probabilidades, com aproximação até à quinta casa decimal e calculadas assumindo independência, são, respectivamente, 0,00075 e 0,94590.

Para cada possível valor de uma alternativa segundo um critério e cada vetor de 3 valores de referência para tal critério, este procedimento é repetido. Nas classes para as quais foram informados apenas dois valores, é usada como terceiro valor a média desses dois e, nas classes para as quais foi informado apenas um valor, tal valor é repetido três vezes. As Tabelas 3 e 4 mostram para a décima alternativa, O_{10}, que tem avaliação 30 para os primeiros 3 critérios e 40 para os 4 últimos, as probabilidades de apresentar valor para cada um dos 7 critérios, respectivamente, maior e menor que os dos perfis de referência de cada classe.

Tabela 3. Probabilidades de Localização acima para a Décima Alternativa

	C1	C2	C3	C4	C5
g1	0,72946	0,32774	0,02306	0,00075	0,00002
g2	0,72946	0,32774	0,02306	0,00075	0,00002
g3	0,72946	0,32774	0,02306	0,00075	0,00002
g4	0,85204	0,51484	0,07446	0,00258	0,00028
g5	0,86821	0,52633	0,06922	0,00404	0,00018
g6	0,86821	0,52633	0,06922	0,00404	0,00018
g7	0,86821	0,52633	0,06922	0,00404	0,00018

Tabela 4. Probabilidades de Localização abaixo para a Décima Alternativa

	C1	C2	C3	C4	C5
g1	0,02372	0,16791	0,60873	0,94590	0,99546
g2	0,02372	0,16791	0,60873	0,94590	0,99546
g3	0,02372	0,16791	0,60873	0,94590	0,99546
g4	0,00746	0,07379	0,40856	0,90482	0,97752
g5	0,00603	0,06911	0,41303	0,86711	0,98288
g6	0,00603	0,06911	0,41303	0,86711	0,98288
g7	0,00603	0,06911	0,41303	0,86711	0,98288

4.2. Combinação dos Critérios

Uma vez obtidas as probabilidades de alocação acima e abaixo de cada classe segundo cada critério, pode-se passar à combinação dessas probabilidades em escores globais. . Para isso, serão usadas as probabilidades conjuntas de localização acima e abaixo segundo todos os critérios.

Com 7 critérios, adotando as fórmulas acima indicadas, os escores de credibilidade de localização acima da i-ésima classe são dados pelo produto $A_{i1}{}^{+}{}_{*}A_{i2}{}^{+}{}_{*}A_{i3}{}^{+}A_{i3}{}^{+}{}_{*}A_{i4}{}^{+}{}_{*}A_{i5}{}^{+}{}_{*}A_{i6}{}^{+}{}_{*}A_{i7}{}^{+}{}_{*}2^{-3*7}$. [13]
Analogamente para os escores de localização abaixo das classes. Os escores das 24 alternativas são dados nas tabelas 5 e 6.

Tabela 5. Escores Globais de Credibilidade de Localização em Classe Superior

	C1	C2	C3	C4	C5
a1	1,1E+03	1,7E-02	1,2E-14	3,4E-29	1,1E-42
a2	6,9E+03	5,9E-01	6,9E-12	2,5E-25	6,5E-38
a3	1,2E+03	2,3E-02	2,2E-14	9,1E-29	3,6E-42
a4	6,3E+03	4,5E-01	3,7E-12	1,0E-25	1,9E-38
a5	1,5E+05	6,0E+02	1,3E-05	8,1E-16	4,1E-26
a6	4,5E+05	5,8E+03	8,3E-04	2,6E-13	5,2E-23
a7	4,0E+05	1,6E+04	1,1E-01	2,9E-09	2,9E-17
a8	4,6E+05	5,1E+03	4,6E-04	8,0E-14	1,2E-23
a9	4,4E+05	7,6E+03	2,9E-03	2,7E-12	1,2E-21
a10	4,5E+05	5,5E+03	6,3E-04	1,5E-13	2,5E-23
a11	7,0E+05	2,1E+04	1,9E-02	3,4E-11	2,9E-20
a12	7,6E+05	2,4E+04	2,2E-02	4,1E-11	3,5E-20
a13	1,1E+06	1,3E+05	9,8E+00	3,2E-06	1,7E-13
a14	5,6E+05	1,1E+04	4,3E-03	2,9E-12	1,5E-21
a15	2,1E+05	1,4E+03	1,1E-04	2,2E-14	5,2E-24
a16	3,4E+05	9,1E+03	4,6E-02	1,2E-09	1,3E-17
a17	2,0E+06	1,4E+06	2,8E+04	5,5E+00	7,9E-05
a18	2,0E+06	1,4E+06	1,9E+04	1,5E+00	1,0E-05
a19	2,1E+06	1,7E+06	1,8E+05	5,1E+02	1,1E-01
a20	2,1E+06	1,7E+06	1,1E+05	8,6E+01	4,8E-03
a21	2,1E+06	1,8E+06	1,7E+05	2,3E+02	2,4E-02
a22	1,9E+06	1,0E+06	1,6E+04	3,4E+00	6,4E-05
a23	2,1E+06	1,9E+06	3,0E+05	1,6E+03	6,4E-01
a24	2,1E+06	1,9E+06	3,6E+05	1,8E+03	8,0E-01

Tabela 6. Escores Globais de Credibilidade de Localização em Classe Inferior

	C1	C2	C3	C4	C5
a1	1,1E+01	2,3E+04	9,5E+05	2,0E+06	2,1E+06
a2	3,2E-01	3,5E+03	5,4E+05	1,9E+06	2,1E+06
a3	6,5E+00	1,7E+04	8,6E+05	2,0E+06	2,1E+06
a4	6,1E-01	5,1E+03	6,3E+05	2,0E+06	2,1E+06
a5	1,3E-07	3,1E-01	1,0E+04	8,3E+05	1,8E+06
a6	1,8E-08	1,2E-01	9,4E+03	9,4E+05	1,9E+06
a7	1,8E-16	1,6E-07	4,0E+00	3,6E+04	5,4E+05
a8	1,1E-07	4,5E-01	1,9E+04	1,1E+06	2,0E+06
a9	4,4E-10	8,5E-03	2,2E+03	5,9E+05	1,7E+06
a10	4,6E-08	2,4E-01	1,4E+04	1,0E+06	1,9E+06
a11	2,5E-10	7,2E-03	2,6E+03	6,8E+05	1,8E+06
a12	3,0E-10	8,5E-03	2,9E+03	7,2E+05	1,8E+06
a13	1,2E-18	5,9E-09	8,9E-01	2,9E+04	5,6E+05
a14	1,8E-09	2,8E-02	4,8E+03	7,6E+05	1,8E+06
a15	1,2E-09	1,1E-02	1,6E+03	3,5E+05	1,3E+06
a16	1,3E-17	1,6E-08	7,1E-01	1,3E+04	3,4E+05
a17	6,6E-30	3,0E-17	1,3E-05	2,3E+02	7,3E+04
a18	4,9E-27	5,8E-15	4,6E-04	1,6E+03	2,2E+05
a19	2,0E-38	5,7E-24	4,5E-10	7,0E-01	3,2E+03
a20	8,8E-33	2,1E-19	6,7E-07	5,6E+01	4,5E+04
a21	2,0E-34	1,1E-20	9,8E-08	2,0E+01	2,7E+04
a22	1,3E-31	1,1E-18	1,1E-06	4,6E+01	3,0E+04
a23	5,6E-40	3,6E-25	7,9E-11	2,9E-01	2,1E+03
a24	3,4E-39	1,7E-24	2,8E-10	6,3E-01	4,3E+03

4.3. Classificação das Alternativas

A classificação final de cada alternativa é obtida comparando os valores das tabelas 5 e 6. A alternativa é alocada na classe em que esses valores são mais próximos um do outro. Para avaliar a robustez da classificação e identificar alternativas mais difíceis de classificar, pontos de corte menores que 1 são usados para gerar classificações alternativas, favorecendo classificação mais alta ou baixa. A Tabela 7 apresenta as classificações finais, seguidas das classificações exigente e benevolente, para o plano de corte em 0,5.

Verificam-se na Tabela 7 apenas cinco divergências entre as classificações benevolente e exigente. Se é usado 0,8 em vez de 0,5, obtêm-se as mesmas classificações com apenas divergência na classificação exigente para a alternativa a2 e na classificação benevolente para as alternativas a6 e a23. Se é uado 0,9 em vez de 0,5 surge mais uma divergência na classificação exigente para a alternativa a4 e mais uma na classificação benevolente, para a alternativa a12.

Outras regras de composição dos critérios também conduzem, neste exemplo, a resultados semelhantes. O mesmo ocorre com a ampliação ou a redução do valor das variâncias.

Tabela 7. Classificação das Alternativas

Alternativa	Classe central	Exigente (0,5)	Benevolente (0,5)
a1	1	1	1
a2	2	1	2
a3	1	1	1
a4	2	1	2
a5	2	2	2
a6	2	2	3
a7	3	3	3
a8	2	2	2
a9	3	3	3
a10	2	2	2
a11	3	3	3
a12	3	3	3
a13	3	3	3
a14	3	3	3
a15	2	2	3
a16	3	3	3
a17	4	4	4
a18	4	4	4
a19	4	4	4
a20	4	4	4
a21	4	4	4
a22	4	4	4
a23	4	4	5
a24	4	4	4

4.4. Comparação com o Método ELECTRE-TRI-nC

Em termos de resultados finais da aplicação aos dados do exemplo, o método aqui proposto concorda sistematicamente com o ELECTRE-TRI-nC. Comparando-se os resultados, encontram-se apenas dois casos de classificação benevolente coincidente com a classificação exigente nos dois métodos com cada método dando classificação diferente. São os da décima e da vigésima quarta alternativas. Enquanto a décima é alocada a C_3 pelo ELECTRE-TRI-nC, o CPP-TRI conclui, mesmo no corte benevolente, que o vetor (30, 30, 30, 40, 40, 40, 40) está mais próximo do par de perfis representativos de C_2, {(20, 20, 20, 20, 20, 20, 20), (30, 30, 30, 30, 30, 30, 30)} do que do representativo de C_3, {(40, 40, 40, 40, 40, 40, 40), (65, 65, 65, 65, 65, 65, 65)}. Também a vigésima quarta alternativa, que o ELECTRE-TRI-nC coloca na classe C_5, o CPP-TRI coloca na classe C_4. Nesta alternativa, o vetor de avaliações é (90, 90, 80, 80, 80, 90, 90) e o perfil representativo da classe C_5 tem avaliação 95 segundo todos os critérios, enquanto os perfis representativos da classe C_4 tem valores variando entre 70 e 85 para 6 critérios e entre 75 e 85 para o quarto.

5. Comentários Finais

O método de classificação CPP-TRI permite levar em conta a imprecisão nas avaliações para produzir medidas probabilísticas de distância de cada alternativa a ser classificada a cada classe. Com base nessas medidas, tem-se um procedimento automático de classificação.

A robustez desse procedimento pôde ser aqui testada em um exemplo, mediante comparação da classificação obtida segundo variantes destinadas a produzir classificações mais acima ou mais abaixo. Diferentes atribuições de importância aos critérios foram também testadas, verificando-se alta estabilidade dos resultados.

Diferentes estimativas para a variância da distribuição normal empregada também conseguiram a resultados semelhantes. O método pode ser aplicado com outras distribuições no lugar da distribuição normal, não sendo de esperar maiores mudanças nos resultados. Pode-se, por exemplo, cogitar do uso de distribuições triangulares com extremos fixos para facilitar a modelagem e evitar a necessidade de estimar a dispersão. A assimetria assim introduzida deve reduzir as distâncias às classes mais afastadas, mas não parece que possa desviar a classificação final.

Outra simplificação adicional pode ser realizada com a substituição da hipótese de independência entre os critérios pela de máxima dependência, do que decorrerá a substituição do produto das probabilidades associadas aos diferentes critérios pela mínima dentre elas. Esta alteração pode ser realizada, também, para tornar o modelo mais realista quando haja motivo para crer em alta correlação entre os critérios. Pode-se assumir também independência entre parte dos critérios e máxima dependência entre outros. A comparação entre os resultados obtidos sob as diferentes hipóteses quanto à correlação também pode servir para apontar alternativas de mais difícil classificação.

Referências

Almeida-Dias, J., Figueira, J.R. e Roy, B. (2010). Electre Tri-C: A multiple criteria sorting method based on characteristic reference actions. European Journal of Operational Research, 204, 3, 565-580.

Almeida-Dias, J., Figueira, J.R. e Roy, B. (2012). multiple criteria sorting method where each category is characterized by several reference actions: The Electre Tri-nC method. European Journal of Operational Research, 217, 3, 567-579.

Antunes, H.A., Alves, M.J., Silva, A.L. e Clímaco, J.C. N. (1989). Algumas reflexões sobre uma base de métodos de programação linear multicritério. Investigação Operacional, 9, 2, 19-35.

Arrow, K.J. Social choice and individual values. Wiley, London,1963.

Belton V. e Stewart T.J. Multiple criteria decision analysis: an integrated approach. Kluwer, Boston, 2002.

Brans, J.P., Mareschal, B. e Vincke, P. PROMETHEE: A NEW FAMILY OF OUTRANKING METHODS IN MULTICRITERIA ANALYSIS. Tenth International Conference of Operational Research (.Operational Research '84). North-Holland,Washington-DC,1984.

Changkong, Y. e Haimes, Y. Multiobjective Decision Making. North Holland, Amsterdam, 1983.

Costa, H.G. A multicriteria approach to evaluate consumer satisfaction: a contribution to marketing. VIII International Conference on Decision Support Systems (ISDSS'05). International Society of Decision Suppotrt Systems, Porto Alegre, 2005.

Costa, H.G. Auxílio Multictritério à Decisão: Método AHP. LATEC/Universidade Federal Fluminense & Associação Brasileira de Engenharia de Produção, Rio deJaneiro, 2006.

Costa, H.G., Mansur, A.F.U., Freitas, A.L.P. e De Carvalho, R.A. (2007). ELECTRE TRI applied to costumers satisfaction evaluation. Produção, 17, 2, 230-245.

Edwards, W. (1977). How to use multiattribute utility measurement for social decisionmaking. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, SMC-7, 5,326-340.

Figueira, J.R., Almeida-Dias, J., Matias, S., Roy, B., Carvalho, M.J. e Plancha, C.E. (2011). Electre Tri-C, a multiple criteria decision aiding sorting model applied to assisted reproduction. International Journal of Medical Informatics, 80, 4, 262-273.

Fishburn, P.C. Utility theory for decision making. Wiley (Operations Research Society of America Publications in Operations Research), New York, 1970.

Fishburn, P.C. Les mathématiques de la décision. Mouton (Mathématiques et sciences de l'homme), Paris, 1973.

Gomes, L.F.A.M., Simões, G.C.F. e Almeida, A.T.D. Tomada de decisão gerencial – enfoque multicritério. Atlas, São Paulo, 2002.

Keeney, R.L. e Raiffa, H. Decisions with Multiple Objectives: preferences and value tradeoffs. Wiley, New York, 1976.

Mousseau, V., Slowinski, R. e Zielniewicz, P. ELECTRE TRI 2.0a. methodological guide and user’s manual. Document du Lamsade. Université de Paris–Dauphine. Paris, 1999.

Roy, B. Classement et choix en presence de points de vue multiples (la methode ELECTRE). Presses Polytechiniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1968.

Roy, B. (1978) ELECTRE III: Un alghoritme de methode de classements fonde sur une representation floue des preferences em presence de criteres multiples. Cahiers de CERO, 20, 1, 3-24.

Roy, B. e Bertier, P.M. La methode ELECTRE II: Une methode de classement en presence de criteres multiples. SEMA (Metra International) Paris, 45. 1971.

Roy, B. e Boyssou, D. Mèthodologie Multicritère d’Aide à la Dècision. Economica, Paris, 1985.

Roy, B. e Hugonnard, J.C. Classement des prolongements de lignes de stations en banlieu parisienne. Cahiers u LAMSADE. Université Dauphine et RATP. Paris. 1981

Roy, B. e Skalka, J. M. ELECTRE IS: Aspécts methodologiques et guide d´utilization. Cahier du LAMSADE. Université de Paris–Dauphine, Paris, 1985.

Saaty, T.L. (1977). A scaling method for priorities in hierarchical structures. Journal of Mathematical Psychology, 15, 3, 234-281.

Saaty, T.L. The Analytic Hierarquic Process. RWS Publications, Pittsburg, 1980.

Saaty, T.L. Decision making for the new millenium : ANP software for dependence and feedback. Katz Graduate School of Business, University of Pittsburgh, Pittsburgh,1999.

Sant'Anna, A. P. (2002) Aleatorização e composição de medidas de preferência. Pesquisa Operacional, 22, 87-103.

Tervonen, T., Figueira, J.R., Lahdelma, R., Dias, J.A. e Salminen, P. (2009) A stochastic method for r robustness analysis in sorting problems. European Journal of Operational Research, 192, 1, 236-242.

Vincke, P. L'aide Multicritère à la Decision. Editions de l'Université de Bruxelles - Editions Ellipses, Bruxeles, 1989.

Yu, W. ELECTRE TRI - Aspects Methodologiques et Guide d'Utilisation. Document du Lamsade. Université de Paris–Dauphine. Paris. 1992.

Zeleny, M. Multiple Criteria Decision Making. McGraw-Hil, New York, 1982.